

ANALIZA, SINTEZA SI PROCESAREA SEMNALELOR DIGITALE

cu ajutorul calculatorului

Introducere

Scopul lucrării - este fixarea cunostintelor despre semnalele utilizate în electronica, cu accent pe latura calitativă a studiului.

- sunt prezentate aprofundat două "studii de caz", dintre care "Tehnica ferestruirii" este esențială pentru achizițiile de date în vederea măsurărilor electronice, a procesărilor pentru telecomunicații, a procesărilor de imagini, etc.

Necesități hard - calculator compatibil IBM-PC

Necesități soft - setul de programe PCDSP ("Digital Signal Processing on Personal Computers")

- autor: Oktay Alkin,
Universitatea "Southern Illinois"
Edwardsville - S.U.A.

- setul de fișiere de date ce reprezintă desfășurarea completă a lucrării de laborator

Meniul programului PCDSP

Sistem

- Incarcare
- Salvare
- Citire
- Nucleu DOS
- Lista variabile
- Stergere
- Tiparire
- Restart

Filtre

- Filtre RFI
 - Proiectare
 - Analiza
- Filtre RII
 - Proiectare
 - Analiza
 - Procesare
 - Extern

Spectre

- Periodograme
- Blackman-Tukey
- Auto-regresiv
- AR-medie mobilă
- Medie mobilă

Grafice

- Variabile
- Optiuni

Date

Aritmetica

Adunare

- Secv + Secv
- Const + Secv

Multiplicare

- Secv · Secv
- Const · Secv

Conjugat

Real

Imaginar

Par

Impar

Generare

Rampa

Fereastra

Rectangulară

Triunghiulară

Blackman

Hamming

Hanning

Impuls

Sin

Cos

Exp

Normal

Uniform

Reset
Incarcare
Salvare
Afisare
Macro
Iesire

Nelinear
Amplitudine
Faza
Sin
Cos
Tg
Exp
Ln
Radical
Reciproc
Procesare
Convolutie
Auto-corelatie
Corelatie
Translatie
Decimare
Inserare 0
Adaugare 0
Transformate
TFR
TFR-Inv
TFD
TFD-Inv
Z-Inv
Editare
Copiere
Basculare
Adaugare
Complex

Indicatii de lucru - Selectiile in meniu si sub-meniu -uri se fac cu tastele-sageți sau prin tastarea initialiei sau majusculei marcate explicit in denumirea pozitiei respective, dupa care se tasteaza <Enter>.

- In fiecare etapa se recomanda afisarea pe ecran a notelor explicative, accesibile prin tastarea <F1>.

Documentatia explicativa pentru lucrarea de laborator - este structurata, dat fiind specificul soft al lucrarii, prin intrepatrunderea - operatiunilor de executat de catre student

(caractere supra-imprimate ("Bold"))

- prezentarii teoretice, explicatiilor, observatiilor (caractere normale)
- detaliilor specifice de utilizare a PCDSP (caractere cursive ("Italice"))

Modul de lucru - pentru a avea posibilitatea unui studiu calitativ si a face toate observatiile fara consum inutil de timp pentru operare si rulare, desi se recomanda parcurgerea tuturor etapelor din tehnologia lucrarii, se poate apela, in caz de dificultate sau, eventual, pentru verificare, la fisierele *.DSP de pe disc ce contin toate rezultatele.

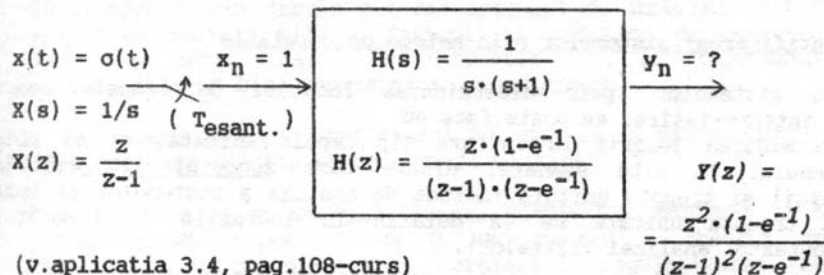
Continutul referatului - Un rezumat cuprinzind, principial, operatiile facute ; se recomanda respectarea succesiunii din desfasurarea lucrarii, impreuna cu rezultatele masuratorilor si observatiile cerute, fara detaliile de sintaxa prezentate intre paranteze drepte sau detaliile specifice de utilizare a PCDSP prezentate cu litere cursive si, doar optional, eventuale consideratii teoretice, formule sau reprezentari grafice sumare.

Desfasurarea lucrarii

1. Sinteza semnalelor - se face, in principal, in modulul

DATE / GENERARE al PCDSP, fie prin specificare functional-analitica, fie dintr-un set de forme prestabilite sau ca secvente aleatoare cu distributie normala sau uniforma (vezi notele explicative, accesibile pe ecran cu tasta <F1>). Propunem ca exercitiu generarea citorva secvente simple.

1.1. Sinteza semnalelor prin transformare z inversa - este o metoda de sinteza indirecta, care va fi detaliata pe o aplicatie din curs. Sintetizam semnalul yn la iesirea unui sistem cu esantionare:



(v.aplicatia 3.4, pag.108-curs)

Programul determina y_n ca transformata z inversa a lui $Y(z)$ specificat ca fractie rationala,

$Y(z) \approx \frac{0,632121 \cdot z^2}{z^3 - 2,36788 \cdot z^2 + 1,73576 \cdot z - 0,367879}$, prin "impartire continua (nelimitata)" a numaratorului, notat $A(z)$ al lui $Y(z)$ -la numitorul sau, notat $B(z)$, (cu rezultatul aproximativ determinat in aplicatia din curs (din definitia $Y(z) \approx 0,632z^{-1} + 1,496z^{-2} + 2,455z^{-3} + 3,424z^{-4} \dots$) transformatei z ca serie de puteri) $\approx Y_1 \approx Y_2 \approx Y_3 \approx Y_4$

Intrarea pentru PCDSP o constituie polinomul $A(z)$, scris cu puteri pozitive ale lui z , prin intermediul unei secvente ce contine coeficientii puterilor lui z in ordinea descrescatoare a acestora din urma, polinomul $B(z)$ de la numitor, specificat la fel, si numarul de impartiri pe care sa le faca programul, din sirul infinit de impartiri nelimitate (s-au presupus $A(z)$ si $B(z)$ ireductibile), deci n maxim din sirul $\{ y_n \}$ aproximat.

* Se incarca de pe disc fisierul YA.DSP, ce contine secventa A, specificatie pentru $A(z)$, [SISTEM / INCARCARE < YA >] si se listeaza coeficientii : [SISTEM / TIPARIRE < A, (S(pe ecran))>]

* Se repeta operatiunea pt. YB_DSP, secventa B. Se pot verifica coeficientii lui B(z) din formula analitica de mai sus
 { Secventele A si B s-au creat in modul sistem / citire, cu respectarea normelor sintactice indicate si in notele explicative (accesibile cu tasta [F1]) : fiecare coeficient se introduce ca pereche (real,imaginar), coeficientii separati prin caractere "," }

* Se calculeaza transformata z inversa a lui Y(z), pentru 6 esantioane care se listeaza, se trec in urmatorul tabel si se

compara cu valorile analitice, $y_n = n - \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}} \cdot (1 - e^{-n})$:
 (v.aplicatia din curs)

y_n	calculat	analitic	y_n	calculat	analitic
y_1			y_4		
y_2			y_5		
y_3			y_6		

2. Analiza (identificarea) sistemelor prin metode de corelatie

Identificarea sistemelor, prin determinarea functiei de transfer care descrie relatia intrare-iesire, se poate face nu numai prin determinarea iesirii la intrare tip impuls unitate, ci si prin raspunsul sistemului la alte semnale, dintre care zgometul alb (metoda exemplificata aici) si treapta unitate (metoda de analiza a sistemelor pe baza raspunsului la treapta unitate se va detalia in lucrarile de laborator urmatoare, in contextul analizei filtrelor).

(v.paragraf 2.8 curs)

Corelatia, $x_1(t) \overset{H}{\parallel} x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \cdot x(u-t) \cdot du$
 se aproximeaza (pt. $t \approx m \cdot T$)

$$r_{x_1, x_2}(m) = \sum_n x_{1,n} \cdot x_{2,(n-m)} \quad , \text{ pt. } m = 0, \dots, (N-1)$$

Zgomotul alb , $v(t)$ [cu densitatea spectrala de putere, d.s.p., $q_v(F)$, constanta, pentru $F \neq 0$, si cu medie nula (deci $q_v(0) = 0$ si deci si $V(0) = 0$), reprezentabil cantitativ prin abaterea medie patratica σ , intrucit, in acest caz, pentru $F \neq 0$, avem evident d.s.p., $q_v(F) = \sigma^2$] este util in identificarea sistemelor, oferind o metoda practica de determinare a functiei pondere : corelatia intre intrarea de tip zgomet alb si iesirea sistemului, $v(t) \overset{H}{\parallel} y(t)$ reprezinta tocmai $h(t)$ (cu factorul de proportionalitate σ^2).
 Calculind, prin integrare intre $-\infty$ si $+\infty$

$$r_{v,y}(t) = v(t) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v(t) * h(t)}_{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} (v(\alpha) * h(\alpha)) \cdot v(\alpha-t) d\alpha =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v(\alpha-t) \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) \cdot v(\alpha-\beta) \cdot d\beta \cdot d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} h(\beta) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{v(\alpha-t) \cdot v(\alpha-\beta) \cdot d\alpha}_{r_{v,v}(\beta-t)} \cdot d\beta$$

$$r_{v,v}(\beta-t) = v(\beta-t) \int_{-\infty}^{\infty} v(\beta-t) = \sigma^2 \cdot \delta(\beta-t)$$

(întrucît spectrul auto-corelatiei zgomotului alb $v(t)$ e constant, egal cu d.s.p, $q_v(F) = \sigma^2$ rezulta ca autocorelatia zgomotului alb este tocmai impulsul Dirac de înaltime σ^2 .)

Deci, $v(t) \int_{-\infty}^{\infty} y(t) = \sigma^2 \cdot h(t)$

Observatii: -Trebuie evitata confuzia dintre d.s.p. constanta a zgomotului alb si spectrul Fourier constant al impulsului Dirac
Doar modulul spectrului Fourier al zgomotului alb e constant.

-Corelatia de identificare prezentata anterior, trebuie facuta, din motivele expuse mai sus, cu exact acelasi semnal $v(t)$ care se aplica si la intrarea sistemului analizat, si in aceeasi ordine, intrucit, spre deosebire de convolutie, corelatia nu e comutativa.

-Comparativ cu metoda teoretica de aplicare la intrarea sistemului necunoscut a unui impuls cit mai apropiat de impulsul unitate (Dirac) ideal si masurarea iesirii $h(t)$ (dificultati practice de generare si masurare), metoda de identificare prin corelatie are, in compensatie, de rezolvat un calcul, într-un bloc suplimentar, corelatorul.

* Se incarca de pe disc fisierul HN.DSP si se vizualizeaza secventa HN, cu 30 de esantioane, functia pondere de identificat

* Se calculeaza si se vizualizeaza secventele HNCONVHN si HNACORHN, continind respectiv $HN * HN$ si $HN \int_{-\infty}^{\infty} HN$, pentru a observa sonarile reciproce caracteristice convolutiei si corelatiei, regularizarea (netezirea) introdusa de convolutie, ca si analogia auto-corelatie $\leftrightarrow$ energie de interactiune a semnalului cu el insusi, cu maximul $HN \int_{-\infty}^{\infty} HN$ in 0 (energia, propriu-zisa a semnalului HN) (v.paragraful 2.14, pag.53-curs)

[DATE / PROCESARE / CONVOLUTIE (\) AUTO-CORELATIE, < HNCONVHN
(\) HNACORHN, HN, (HN) >]

* Se genereaza si se vizualizeaza secventa ZGOMOT, cu 300 de esantioane, de tip zgomot alb (cu distributie statistica normala), cu medie 0 si abatere medie patratica 1, prin intermediul generatorului de numere aleatoare continut in program :

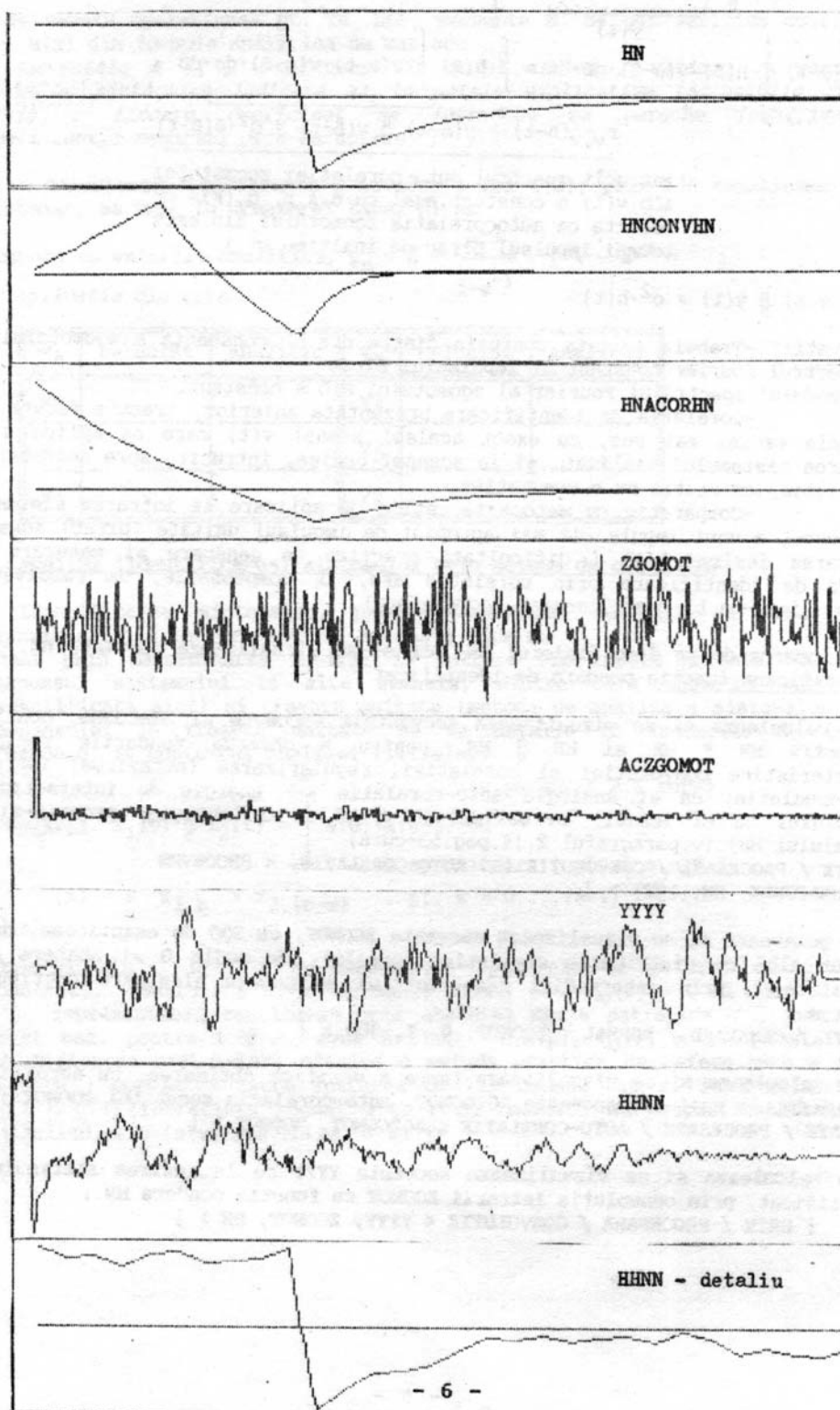
[DATE / GENERARE / NORMAL < ZGOMOT, 0, 1, 300 >]

* Se calculeaza si se vizualizeaza (spre a verifica obtinerea, cu aproximatie, a unui impuls unitate) secventa ACZGOMOT, auto-corelatia secventei ZGOMOT :

[DATE / PROCESARE / AUTO-CORELATIE < ACZGOMOT, ZGOMOT >]

* Se calculeaza si se vizualizeaza secventa YYYY de la iesirea sistemului de identificat, prin convolutia intrarii ZGOMOT cu functia pondere HN :

[DATE / PROCESARE / CONVOLUTIE < YYYY, ZGOMOT, HN >]



* Se calculeaza si se vizualizeaza secventa HHNN, calculata, pentru identificarea sistemului, drept corelatia ZGOMOT $\frac{1}{N}$ YYYY (atentie la ordinea de calcul):

[DATE / PROCESARE / CORELATIE < HHNN, ZGOMOT, YYYY >]

* Se vizualizeaza, separat, doar primele 30 de esantioane ale secventei HHNN, spre a putea vedea, comparativ cu HN, precizia metodei de identificare: [GRAFICE / OPTIUNI <.. X max.=29..>]

3. Metode de analiza spectrala

3.1. Analiza semnalelor cu Transformata Fourier Rapida

* Se genereaza o secventa "SIN64", de lungime N=64, reprezentind perioada de baza a unei sinusoides redresate

deci ($W_{normata} =$) $B = \pi/64 = 0,0490873852$

[DATE/ GENERARE/ SIN < SIN64, A=1, B=0.0490873852, C=0, N=64 >]

(se detaliaza un exemplu tratat analitic la seminar (v.si aplicatia 3.7, pag.133-curs) , in care s-au calculat coeficientii seriei Fourier a sinusoides

redresate, $a_k = \begin{cases} 0 \text{ pt. } k \text{ impar [perioada efectiva este } 0,5 \cdot T(\text{sinusoida neredresata})] \\ -2 / [\pi(k+1)(k-1)] \text{ pt. } k \text{ par} \end{cases}$

$a_0 = 2/\pi = 0,6366197731$; $a_2 = 2/[\pi \cdot (2^2-1)] = 0,212206591$
 $a_4 = 2/[\pi \cdot (4^2-1)] = 0,0424413182$; $a_6 = 2/[\pi \cdot (6^2-1)] = 0,0181891364$
 , etc.)

* Se vizualizeaza "SIN64" ca secventa discreta, observindu-se numerotarea tipica contextului TFR (SIN64₀ = sin 0 ,... , SIN64₆₃ = sin ($\pi/64$)·63

* Se calculeaza "FSIN64", TFR a secventei "SIN64" :
 [DATE / TRANSFORMARE / TFR < FSIN64, SIN64 >]

* Pentru comparare cu coeficientii seriei Fourier, in acest caz particular in care perioada efectiva e jumatate din perioada luata in calculul seriei Fourier, (TFR [$x_{e,p}$] (m) / N $\approx a_{2m}$) se imparte "TFR64" la 64 : [DATE / ARITMETICA / MULTIPLICARE / CONSTANTA < TFR64, TFR64, 0.015625 (=1/64) >]

* Se listeaza pe ecran FSIN64: [SISTEM/ TIPARIRE < FSIN64, S>]

* Considerind partea imaginara nesemnificativa (spectrul unui semnal real e real), se compara primele 4 valori cu $a_0, \dots, a_6$.

* Se pregateste FSIN64 pentru reprezentare grafica (sint admise doar secvente reale): [DATE / ARITMETICA / REAL < RFSIN64, FSIN64 >] si se face reprezentarea grafica, observind simetria fata de N/2, provenita din simetria fata de N/2 a secventei SIN64; deci, pentru aproximarea coeficientilor seriei Fourier, trebuie considerata doar 1-a jumatate a secventei FSIN64 .

* Se decimeaza SIN64, obtinindu-se SIN32 :

[DATE / PROCESARE / DECIMARE < SIN32, SIN64, 2 >] si se reiau etapele de analiza de mai sus, observind cresterea erorilor de aproximare.

* Se continua decimarea (SIN16, SIN8, SIN4), reluind doar listarea valorilor, pentru comparatie (inclusiv cu calculele de la seminar, pt. N=4).

3.2. Calculul densitatii spectrale de putere

3.2.1. Metoda periodogramelor - se bazeaza pe teorema Wiener-Hincin: Spectrul Fourier al auto-corelatiei este densitatea spectrala de energie: (v.paragraf 2.14, pag.53-curs)

$$F [r_{11}(t)] (w) \stackrel{(not.)}{=} R_{11}(w) = | X(w) |^2$$

Interpretarea lui $| X(w) |^2$ ca densitate spectrala de energie rezulta din teorema Parseval (varianta Rayleigh pt.semnale complexe) (v.paragraf 1.1, formula 1.8, pag.6-curs)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | x(t) |^2 \cdot dt = \int_{-\infty}^{+\infty} | X(f) |^2 \cdot df$$

energia semnalului $x(t)$

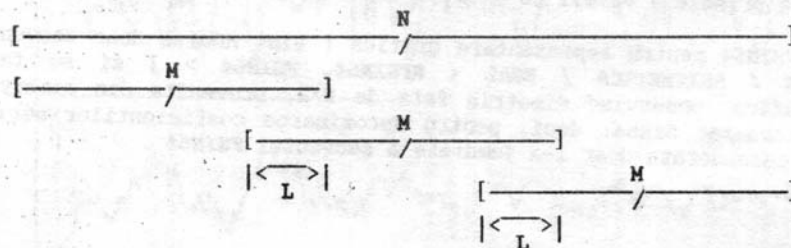
Se justifica astfel calculul aproximativ (estimativ) al densitatii spectrale de putere ca "periodograma" :

$$q(F)_{[periodograma]} = \frac{1}{N} \cdot \left| \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi F n} \right|^2$$

(unde F e frecventa normata $F = f \cdot T_{\text{esantionare}}$).

Impartirea la N (durata normata a duratei ferestrei de observatie $N \cdot T_{\text{es.}}$) face trecerea de la densitatea spectrala de energie din formulele de mai sus la d.s. de putere.

Pentru semnale nedeterminate (prezentate in detaliu la cursul de Tehnica Transmisiunii Informatiei), se poate arata ca abaterea medie patratica a estimatului d.s.p. de mai sus nu se anuleaza cind $N \rightarrow \infty$, dar scade daca se calculeaza d.s.p. ca medie a d.s.p. (metoda Welch a periodogramelor mediate) calculate pe segmente de lungime M din secventa de lungime N care se suprapun pe cite L esantioane la capete (nu trebuie neaparat ca N-L sa fie multiplu de M-L) :



3.2.2. Metoda Blackman-Tukey - contine calculul bazat direct pe teorema Wiener-Hincin, al autocorelatiei (pe suport aproximat la $m = -M, \dots, M$) si apoi al spectrului acesteia, cu impartire la durata secventei :

$$q(F) [\text{Blackman-Tukey}] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-M}^M r_{xx}(m) \cdot e^{-j2\pi Fm}$$

Metoda estimarii spectrale auto-regresive - contine calculul aproximativ al unui filtru digital recursiv, cu o functie de transfer fara zerouri in planul z , care, cu zgomot alb la intrare, sa furnizeze la iesire secventa de date respectiva.

Zgomotul alb, prezentat anterior, (vezi si notatiile convenite) este util in aceasta metoda prin relatia spectrala de tip produs algebric dintre intrare-functie de transfer-iesire, scrisa pentru d.s.p. :

$$q_x(F) = |H(F)|^2 \cdot q_v(F),$$

$$\text{particularizata : } q_x(F) = |H(F)|^2 \cdot \sigma^2$$

intrucit calculul filtrului, prin $|H(F)|^2$, duce la un rezultat direct proportional, prin σ^2 , cu d.s.p. cautata.

Se calculeaza un filtru, ales doar cu poli in planul z ,

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 \cdot z^{-1} + b_2 \cdot z^{-2} + \dots + b_M \cdot z^{-M}} \quad \begin{array}{l} \text{pentru simplitatea} \\ \text{sistemului de} \\ \text{ecuatii recursiv} \end{array}$$

("regresiv") corespunzator :

$$x_n = - \sum_{m=1}^M b_m \cdot x_{(n-m)} + v_n$$

Dindu-se secventa de intrare, $\{x_n\}$, si ordinul M al filtrului, se calculeaza coeficientii b_m ai filtrului (evident adaptat la forma semnalului de la iesire) si σ (care reprezinta cantitativ zgomotul alb de la intrare); coeficientul b_M se zice "coeficient de reflexie". Cu $z = e^{j2\pi F}$ se calculeaza direct $|H(F)|^2$ si apoi estimatul d.s.p.

Implementarea metodei se face prin 2 algoritmi de calcul care difera mai ales in modul de rezolvare a sistemului recursiv de tip "predictie liniara" de mai sus : algoritmul Yule-Walker si algoritmul Burg, dintre care utilizatorul este invitat sa aleaga. In ambele cazuri, Akaike a demonstrat ca, pentru o estimare optima a d.s.p., dintre toate valorile lui M trebuie aleasa cea pentru care $(\ln \sigma) + M/N$ rezulta minim.

3.2.3. Metoda estimarii spectrale auto-regresive cu medie mobila - e o varianta a celei prezentate anterior, de data aceasta cu filtru digital fara poli in planul z ,

$$H(z) = 1 + a_1 \cdot z^{-1} + a_2 \cdot z^{-2} + \dots + a_M \cdot z^{-M}, \text{ sistemul de ecuatii}$$

$$\text{generic, } x_n = v_n + \sum_{m=1}^M a_m \cdot x_{(n-m)}, \text{ rezolvindu-se prin metoda}$$

Durbin, care include o etapa Yule-Walker de ordinul L .

L este "mobil" (poate fi ales de utilizator): $M \ll L \ll N$.

4. Tehnica ferestruirii

Prelucrările în timp real asupra semnalelor oarecare esantionate tipice în telecomunicații digitale, măsurări și achiziții de date, procesări de imagine, etc., necesită observații finite, de lungime N (limitat inferior de caracteristicile domeniului specific de semnale de procesat și superior de costuri / tehnologie).

Pe lângă filtrarea spectrală de gardă asupra semnalului, (FTJ la $f_{\text{esantionare}} / 2$, conform criteriului Nyquist), se impune deci și o filtrare temporală de gardă (trunchiere în timp, pe care o vom numi "ferestruire" pentru a o deosebi de filtrarea spectrală) la N esantioane / observație, de exemplu pentru un transformator Hilbert sau Fourier numeric de ordin N .

Semnalul de procesat va fi deci aproximat prin trunchiere. În următoarea "fereastră temporală" de lungime $N \cdot T_{\text{esantionare}}$ se face o nouă observație (achiziție), urmată de un nou calcul de procesare.

În general, pentru a spori viteza de prelucrare la un anumit N , sau a permite mărirea lui N la aceeași viteză de prelucrare, achiziția unei noi secvențe se face în paralel cu calculul secvenței precedente (viteza de achiziție e în general mai mare decât viteza de calcul).

Trunchierea propriu-zisă (reținerea a N esantioane pastrându-le întocmai valoarea) are unele dezavantaje tipice seriilor Fourier trunchiate, cu care asemanarea se face pe baza dualității timp-frecvență. Astfel, seriile Fourier trunchiate la un număr finit de coeficienți spectrali, aproximează neconvenabil discontinuitățile semnalelor periodice. Pentru un tren de impulsuri dreptunghiulare periodice, semnalul aproximat sintetizat cu un număr finit de coeficienți spectrali are supracreșteri în aproximarea flancurilor care nu scad sub 17 %, chiar dacă numărul de coeficienți cu care sintetizăm aproximatul crește și supracreșterea devine tot mai îngustă - "fenomenul Gibbs".

Semnalul sintetizat cu un număr finit de coeficienți spectrali corespunde în spectru cu o trunchiere (ferestruire) dreptunghiulară deci aproximatul e convoluția aproximatului cu sinus cardinal, undulațiile aproximatului și supracreșterile în dreptul flancurilor fiind datorate lobilor laterali destul de pronunțați pe care îi are sinus cardinal.

Dual, trunchierea în timp de tip fereastră dreptunghiulară corespunde cu supracreșteri spectrale nedorite.

Se justifică deci utilizarea trunchierii temporale, cu ferestre de ponderare optimizate pe diferite criterii.

Regularizarea prin convoluție este nedorită dacă se dorește rezoluție mare în evidențierea oricărei discontinuități spectrale.

Pentru rezoluție mare, trebuie ca lobul principal al spectrului ferestrei să fie foarte îngust ($\leftrightarrow$ durată mare a ferestrei)

Pentru ripluri mici trebuie ca lobi laterali ai spectrului ferestrei să fie foarte scunzi ($\leftrightarrow$ netezime mare a ferestrei în timp).

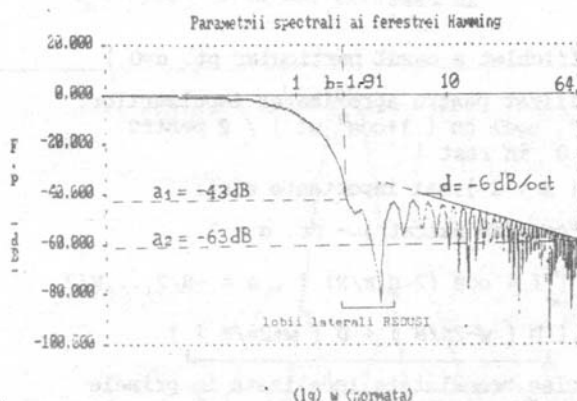
Cele două cerințe sînt contradictorii: plecarea/sosirea în extremități cu netezime cit mai mare (derivate nule pînă la un ordin tot mai mare) înseamnă racordare cu un clopot central al ferestrei tot mai îngust (deci lobul central al spectrului se lățește).

O apreciere globală a ferestruirii $x(t) \cdot f(t)$ a unui semnal $x(t)$ cu o fereastră $f(t)$ este dată de abaterea spectrală

$$A(w) = [X(w) * F(w)] - X(w).$$

Caracterizarea spectrala a ferestrei se face si cu parametrii :

- b - frecventa la care lobul principal cade la valoarea de virf a lobilor laterali (in unitati logaritmice, normata prin inmultire cu durata ferestrei)
- a_1 - valoarea de virf a lobilor laterali (in [dB], relativ la valoarea de virf a lobului central)
- a_2 - valoarea lobilor laterali la frecventa relativa 64 (la care se poate considera ca s-a atins comportamentul asimptotic in descresterea lobilor laterali.
- d - panta de descrestere asimptotica a anvelopei lobilor laterali (in dB/octava sau dB/decada cu scarile de reprezentare de mai jos)



Considerind ferestruirea unui semnal esantionat

$x_e(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$, $x(t) \cdot \delta_T(t) \cdot f(t)$, putem, asociativ, sa consideram prelucrarea in ansamblu ca produs al $x(t)$ cu fereastră esantionata:

$$f(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{f_n} f(nT) \cdot \delta(t-nT) \quad \text{si deci spectrul semnalului esantionat si ferestruit este}$$

$$X(w) * F_e(w)$$

$$F(w) * \left[\frac{2\pi}{T} \cdot \delta_{2\pi/T}(w) \right]$$

a) Fereastră dreptunghiulară (Dirichlet)

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{pt. } n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 \} \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

$$F_e(w) \stackrel{(\text{not.})}{=} D(w) = e^{-j \cdot \frac{N-1}{2} \cdot w} \cdot \frac{\sin \left(\frac{N}{2} \cdot w \right)}{\sin \left(\frac{w}{2} \right)}$$

("nucleul Dirichlet" care va fi evidentiat si in calculul spectral al celorlalte ferestre).

Pe langa fereastra dreptunghiulara (Dirichlet) amintim, fara sa detaliez, o alta fereastra simpla, fereastra triunghiulara (Bartlett), de tip rampa descrescatoare utilizata si ea in analizele nepretentioase (ale proceselor (semnalelor) liniare)

b) Ferestrele in $\cos^\alpha$ (α natural, uzual intre 1 si 4)

Au avantajul unei generari simple si al unei identificari usoare a proprietatilor transformatei functiilor cosinus.

$$f_n = \begin{cases} \cos^\alpha (n\pi/N) & \text{pt. } n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

(deci fereastra Dirichlet e cazul particular pt. $\alpha=0$)

[un semnal inrudit, utilizat pentru aproximarea impulsurilor, este "cosinus ridicat", egal cu $(1 + \cos^\alpha \omega t) / 2$ pentru $t = -\pi/\omega, \dots, \pi/\omega$ si 0 in rest]

Pe langa fereastra $\cos$ ($\alpha = 1$), mai importante sint:

b1) Fereastra Hanning ("cosinus patrat") - pt. $\alpha = 2$

$$f_n = \cos^2(n\pi/N) = 0,5 [1 + \cos(2n\pi/N)], \quad n = -N/2, \dots, N/2$$

$$F_e(\omega) = 0,5 \cdot D(\omega) + 0,25 \cdot [D(\omega - 2\pi/N) + D(\omega + 2\pi/N)]$$

(nuclee translatate, localizate in primele zerouri ale nucleului central si in opozitie de faza cu lobii laterali ai acestuia -> anularia partiala a lobilor laterali)

[principiul ferestrelor $\cos^\alpha$]

b1') Fereastra Hamming - derivata din fereastra Hanning pe principiul anularii partiala a lobilor laterali

$$f_n = \beta + (1 - \beta) \cdot \cos(2n\pi/N)$$

(fereastra Hanning e caz particular al ferestrei Hamming pt. $\beta = 0,5$)

$$F_e(\omega) = \beta \cdot D(\omega) + 0,5 \cdot (1 - \beta) \cdot [D(\omega - 2\pi/N) + D(\omega + 2\pi/N)]$$

b1'') Fereastra Hamming propriu-zisa respecta conditia

$$f_0 = 1 \quad \Leftarrow \quad [\beta + (1 - \beta) = 1]$$

Principal, 1-ul lob lateral care poate fi anulat e centrat in jurul lui $5\pi/N$ [si nu la $3\pi/N$ care ramane in lobul principal latit (aceasta latire e dezavantajul complementar avantajului dat de netezirea spectrului ferestrei)].

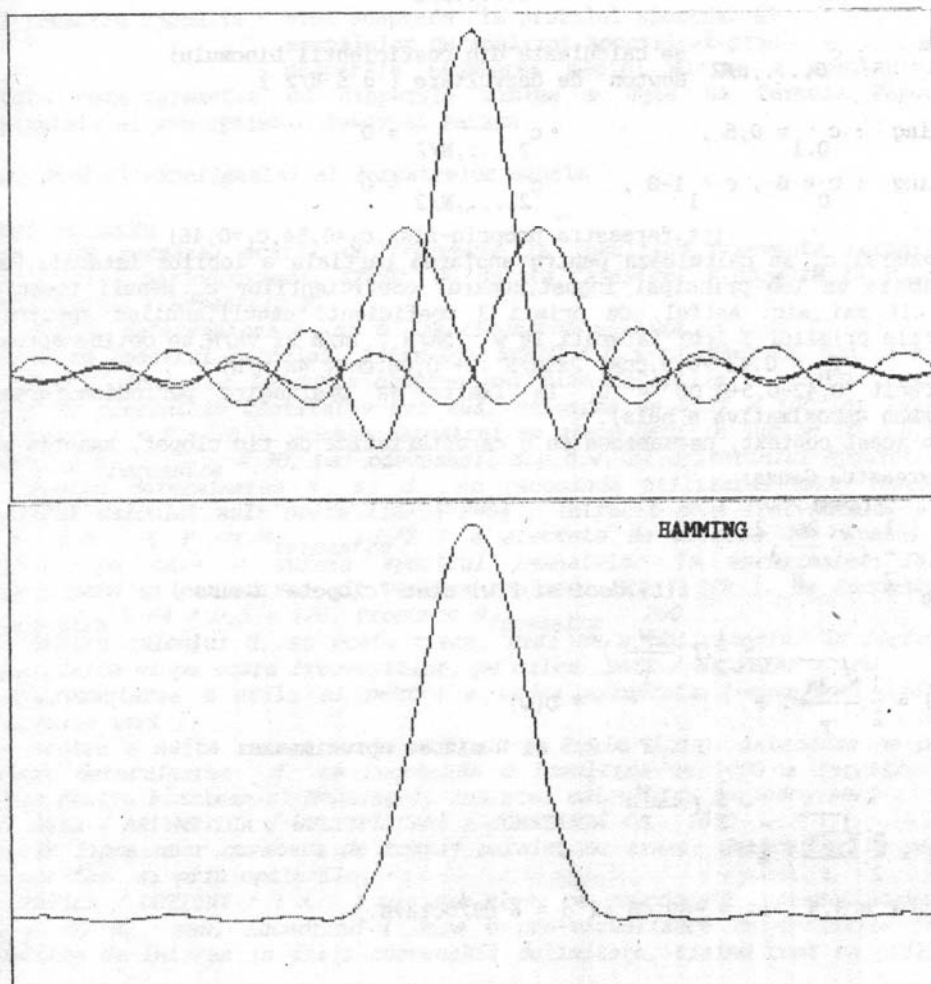
Asa cum se ilustreaza mai jos, maximele celor doua spectre laterale sinc adaugate la dreapta si la stânga nucleului central sinc Dirichlet, compenseaza cu primul si, respectiv, cel de-al doile minim local, maximul local principal de la $w = 5\pi/N$, anulând astfel $F_e(w)$ la aceasta pulsatie. Se obtine profilul spectral scontat, netezit, dar cu o latire a lobului central.

Considerând, aproximativ, ca extremele locale ale celor trei functii sinc sunt la $(2k+1)\pi/N$, ecuatie de compensare este

$$\frac{1-\beta}{2} \cdot \left(\frac{N}{3\pi} + \frac{N}{7\pi} \right) = \beta \cdot \frac{N}{5\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \beta = 25/46 = 0,543478261... \approx 0,54$$

astfel ca fereastra Hamming propriu-zisa e

$$f_n = 0,54 - 0,46 \cdot \cos(2 \cdot n \cdot \pi / N)$$



Fata de fereastră Dirichlet, înrautățirea b (deși lobul central se lățește practic cu mai puțin de $b_{\text{Hamming}} / b_{\text{Dirichlet}}$ fata de fereastră Dirichlet căci b e raportat la 1-ul lob lateral care scade semnificativ) e însoțită de o importantă îmbunătățire (de peste 30 de ori) a atenuării lobilor laterali

c) Fereastră Blackman

$$f_n = \sum_{m=0}^{N/2} c_m \cdot \cos(2\pi \cdot m \cdot n / N) \quad n = -N/2, \dots, N/2, \quad \text{cu} \quad \sum_{m=0}^{N/2} c_m = 1.$$

$$F_e(w) = \sum_{m=0}^{N/2} (-1)^m \cdot \frac{c_m}{2} \cdot [D(w - 2\pi \cdot m / N) + D(w + 2\pi \cdot m / N)]$$

Ferestrele Blackman reprezintă deci generalizări ale celor prezentate pînă acum:

$$\text{Dirichlet: } c_0 = 1, \quad c_1, \dots, N/2 = 0$$

$$\cos^\alpha: c_0, \dots, N/2 \text{ se calculează din coeficienții binomului Newton de dezvoltare } (\alpha \leq N/2)$$

$$\text{Hanning: } c_{0,1} = 0,5, \quad c_2, \dots, N/2 = 0$$

$$\text{Hamming: } c_0 = 8, \quad c_1 = 1-8, \quad c_2, \dots, N/2 = 0$$

(pt. fereastră propriu-zisă, $c_0=0,54, c_1=0,46$)

În general c_m se calculează pentru anularea parțială a lobilor laterali. Pentru a realiza un lob principal îngust, numărul coeficienților c_m nenuli trebuie să fie cât mai mic. Astfel, cu primii 3 coeficienți nenuli, anulînd spectrul în centrele primilor 3 lobi laterali, la $w = 5\pi/N, 7\pi/N$ și $9\pi/N$, se obține aprox.:

$$f_n = 0,42 + 0,5 \cdot \cos(2\pi \cdot n / N) + 0,08 \cdot \cos(4\pi \cdot n / N)$$

(întrucît $0,42 - 0,5 + 0,08 = 0$, la limita de prelungire periodică, fereastră Blackman aproximativă e nulă).

În acest context, deasemenea cu o caracteristică de tip clopot, amintim și:

d) Fereastră Gauss:

$$f_n = e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2n}{\Gamma} \right)^2} \quad (f(t), \text{ deci și } F(w) \text{ sînt "clopote" Gauss})$$

$$F_e(w) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w}{\Gamma} \right)^2} * D(w)$$

Pt. $\Gamma > 2,5$ și w mic, se aproximează:

$$F_e(w) = \frac{N}{2} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w}{\Gamma} \right)^2}$$

Pentru $\Gamma = 3,5$, $a_1 = -69 \text{ dB}$ și $d = 6 \text{ dB/octava}$.

e) Ferestre adaptate la domeniul semnalelor de analizat

e1) Ferestre Tseng-se determina prin impunerea unor conditii de latime a lobului principal si inaltime a lobilor laterali, eventual cu frecvente impuse de anulare, (care permit, de exemplu, o rezolutie sporita in vecinatatea imediata a liniilor spectrale principale ale semnalului $x(t)$ de analizat), spectrul ferestrei fiind deci incadrat intr-un gabarit de tip "filtru trece jos" si sintetizat pe tipicul teoriei filtrelor electrice, cu polinoame Cebisev. Fereastra temporală se determina de aici prin transformare Fourier inversa.

e2) Ferestre Kaiser-Bessel - dintre toate ferestrele de aceeași durată, aceasta e adaptată la semnalele cu durată respectivă și o anumită bandă. Formula ei, în care e considerată banda, a fost determinată de Kaiser cu ajutorul funcției Bessel de primul ordin modificată.

e3) Ferestre Papoulis - sint adaptate la profilul spectral al semnalelor de analizat, specificat prin dispersia (abaterea medie) minimă a spectrului. La o durată dată, fereastra cu dispersie minimă e dată de formula Papoulis, cu variantele ei sub-optimale Tukey și Parzen.

4.2. Studiul experimental al ferestrelor uzuale

Modul de lucru

Se face normarea scării de frecvențe la înmulțind frecvența normată (la $f_{\text{esant.}}$) a periodogramei, $NFREQ$, cu durată fereștrei (normată la $T_{\text{esant.}}$), obținându-se frecvențele F .

Pentru determinarea a_1 și b se recomandă utilizarea unor ferestre scurte, astfel ca spectrul calculat, între $0 < NFREQ < 0,5$ să cuprindă doar 1-a decadă a lui F , pentru a se putea observa mai bine detaliile (pentru tipurile de ferestre prezentate cantitativ mai sus, valoarea de vîrf a lobilor laterali e în decadă $1 < F < 10$). Durata fereștrei se alege deci în jur de $10 / 0,5 = 20$. Propunem $N_{\text{fereastră}} = 30$, mai convenabil d.p.d.v. al criteriului Nyquist.

Pentru determinarea a_2 și d se recomandă utilizarea unor ferestre cu spectrul calculat mult peste limita $F=64$, întrucît zona frecvențelor extreme, $f \ll 0,5$, ($F \ll N_{\text{fereastră}}/2$) e afectată de alierea la capatul benzii tipice, pe care o suferă spectrul semnalelor la aproximarea lor prin esantionare și periodizare în vederea analizei TFD (TFR). Se recomandă deci $N_{\text{fereastră}} > 64 / 0,5 = 128$. Propunem $N_{\text{fereastră}} = 200$.

Pentru calculul d , se poate trece, deși nu e obligatoriu, la reprezentare logaritmică și pe scara frecvențelor, pe calea $DATE / NELINIAR / LOG$ [reprezentarea e utilă și pentru a vedea asimptota (-anvelopa) liniară la frecvențe mari].

Pentru a evita saturarea la -100 dB pe curba d.s.p. introdusă de program, pentru determinarea d se recomandă o înmulțire cu 1000 a fereștrei (cel puțin pentru Blackman și Hanning), înaintea calculului periodogramei : ([$DATE / ARITMETICA / MULTIPLICARE / CONSTANTA <.. 1000 ..>$])

În lipsa unor cursoare de trasaj paralel cu axele, determinările pe grafic se pot face și prin opțiunile ($GRAFICE / OPTIUNI /$) X, Y ; min, max alese pe coordonata reprezentativă pentru $a_1, 2, b, d$, sau, încadrînd (după o pre-vizualizare cu opțiunile "Auto") punctele de interes în fisii convenabil delimitate, ținînd cont că grila are

$X \text{ min.} = 2$, $X \text{ max.} = 2,5$, etc.)

Masuratori in laborator

[illegible]

tipul ferestrei	parametrii caracteristici			
	a_1 [dB]	b	a_2 [dB]	d [dB/oct]
Dirichlet				
Bartlett				
Blackman				
Hamming				
Hanning				

- de lungime $512 \cdot T_{es}$, ($N=512$)

- observatie: alegind un semnal cu (anti-) simetrie fata de $N/2$, spectrul aproximat e simetric, ca si cel al semnalului ne-aproximat

pulsatia normata W_D ($= w_D \cdot T_{\text{esantionare}}$)

[DATE / GENERARE / COS < XP, A=1, B = 0.30679616, C=0 >]

$$W_m = B = \frac{2 \cdot 2\pi}{512} = 0,024543693 \quad [\text{generat analog cu "xp"}]$$

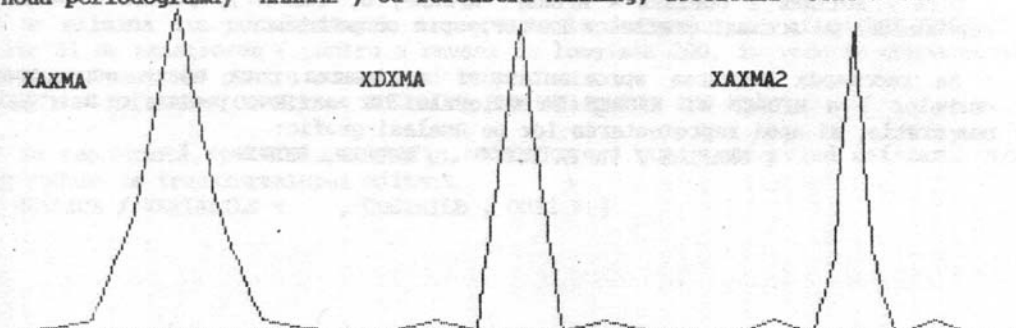
* Se calculeaza periodograma, cu ferestre Dirichlet si Hanning:
[SPECTRU / PERIOGRAMA < Segment=512, R (respectiv A),
(scara liniara pt. d.s.p.): 1, XDXMA (respectiv XAXMA) >]

- dezavantajul ferestrei Hanning: -pierderea rezolutiei spectrale, cu latirea zonei spectrale din jurul frecventei purtatoare pina la inglobarea celor doua benzi laterale, si

(e suficient pt. comutare sa tastati <ESC> dupa ce ati mai coborit 1-2 pozitii in sub-meniuul **GRAFICE / OPTIUNI**), observind in spectrul d.s.p. discret **XDUMA** purtatoarea si cele doua linii spectrale laterale.

Observatie: Cu acest exemplu nu se poate observa celalt aspect, al netezimii spectrului [fara prezenta unor ripluri care indica componente spectrale false (desi, la spectrele "netede" obtinute cu celelalte ferestre, latirea zonelor spectrale inseamna tot componente spectrale false)], care, in mod dual, face ca fereastra Hanning sa fie mai avantajoasa, asa cum se poate vedea din studiul comparativ urmatoar.

* Se dubleaza lungimea secventei "xma":
[DATE / EDITARE / ADAUGARE < XMA2, XMA, XMA >], observind ca
noua periodograma, "XAXMA2", cu fereastra Hanning, deceleaza cele 2 BL.



Studiu comparativ al ferestrelor

* Se genereaza o secventa "CC" de lungime $N=256$, cu spectrul cu 2 linii egale la $F=0$ si $F=5/256=0,01953125$: $CC_n = 1+2\cos B \cdot n$ cu $B = 5 \cdot 2\pi/256 = 0,122718463$ (5 perioade/secventa) :

[DATE / GENERARE / COS < CC, A=2, B=0.122718463 , C=0 > ,apoi
DATE / ARITMETICA / ADUNARE / CONSTANTA < CC, CC, 1 >]

* Se calculeaza periodogramele XDCC, XTCC, XBCC, XHCC si XACC, ale lui CC, cu toate tipurile de ferestre si scara logaritmica <..tip 2 ..> pentru d.s.p.

* Se vizualizeaza comparativ cite doua periodograme, intre ($F_{min}=$) X min.=0 (sau "Auto") si ($F_{max}=$) X max.=0.05 , notind observatiile facute si ordinea descrescatoare pe criteriile de optim:
a) rezolutie, b) 1-ul riplu c) latirea zonelor spectrale

Verificari de consistenta TFR - periodograme d.s.p.

* Se genereaza o secventa dreptunghiulara "DREP" de lungime $N=32$ (durata relativ scurta <-> spectru relativ larg, mai usor de observat) :

[DATE/ GENERARE/ FEREASTRA/ RECTANGULARA < DREP, 64 >]

* Se calculeaza "XDREP", periodograma d.s.p. a lui DREP, cu scara liniara (tip 1) :

[SPECTRU / PERIODOGRAMA < DREP, R, 1, XDREP >]

* Se calculeaza "RXDREP", radical din XDREP, pentru a obtine, conform teoremei Wiener-Hincin, estimatul modulului spectrului:

[DATE / NELINEAR / RADICAL < RXDREP, XDREP >]

* Se prelungeste DREP, la $N=512$ esantioane, cu o secventa de $(512-32=) 480$ esantioane 0 (pentru a obtine o secventa TFR de 512 esantioane, din care 1-a jumatate, avind exact 256 esantioane, cit lungimea fixa a periodogramelor, sa poata fi comparata cu RXDREP) :

[DATE / PROCESARE / ADAUGARE 0 < DREP, DREP, 480 >]

- observatie: spectrul TFR sau d.s.p. a unui semnal (inerent de tip impuls generalizat - cu suport finit - in contextul acestui set de programe) nu se modifica prin prelungirea lui la stinga sau la dreapta cu secvente de 0, intrucit ferestruirea se face cu o aceeaasi functie de latime $N=256$ (spectrul exact e aproximat prin convolutie cu un acelasi spectru al ferestrei).

* Se calculeaza "FDREP", TFR a lui "DREP" :

[DATE / TRANSFORMARE / TFR < FDREP, DREP >] si apoi modulul sau,

"MFDREP" : [DATE / NELINEAR / MODUL < MFDREP, FDREP >],

care se trunchiaza la 256 esantioane:

[DATE / EDITARE / COPIERE < MFDREP, MFDREP, 0, 255 >], pentru a putea fi reprezentat pe acelasi grafic cu RXDREP, spre comparatie.

* Se recomanda normarea aproximativa (nu exacta caci apare suprapunerea curbilor) a MFDREP si RXDREP la valorile lor maxime, pentru o mai usoara comparatie, si apoi reprezentarea lor pe acelasi grafic:

[GRAFICE / VARIABLE < , MFDREP, RXDREP >]

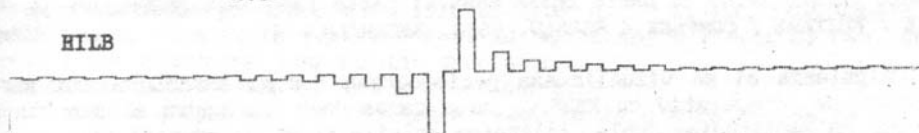
5. Procesarea semnalelor

Procesarea semnalelor e tratata generic de programul PCDSP drept convolutie cu o secventa oarecare ce poate fi asimilata si cu functia pondere temporala (raspunsul la impulsul unitate) a unui filtru digital.

* Se incarca de pe disc fisierul HILB_ si se vizualizeaza secventa HILB care continine functia pondere temporala (raspunsul la impulsul unitate) a unui transformator Hilbert digital de ordin 63 (obtinut ca filtru RFI, cu sectiunea FILTRE a setului de programe PCDSP, care va fi aprofundata in urmatoarele lucrari de laborator). Formula analitica a functiei pondere, pe baza careia secventa HILB se poate obtine si direct, dar mai laborios, este :

$$s_n \quad n (= 0 - 62) = \begin{cases} 0 & \text{pt. } n \text{ par} \\ \frac{1}{N} \cdot \text{ctg} \frac{n \cdot \pi}{N} & \text{pt. } n \text{ impar} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{v. paragrafele 3.9} \\ \text{(si 2.15) din curs} \end{matrix}$$

generata in HILB prin translare pentru centrare pe $n = 31$ (in vederea acestei centrari s-a ales N_{HILB} impar).



Reamintim ca, la observatii / achizitii / procesari pe secvente de N esantioane, se recurge adesea la centrarea temporala conventionala pe $N/2$ pentru a putea trata si aspecte de paritate sau cauzalitate in domeniul temporal.

Dual, in TFR (si in periodogramele d.s.p. de 512 linii, calculate (doar) pentru secvente complexe), in a 2-a jumatate a secventei se gaseste, translata cu N pozitii la dreapta, zona spectrala a frecventelor negative.

* Se genereaza secventa cosinusoidala COS1 cu ($W \cos =$) $B = 7 \cdot 2\pi / 199 = 0,221016568$, avind 7 perioade si 200 esantioane (nr. impar de perioade si 199 in loc de 200 la numitorul lui B - pentru simetrie perfecta, cu axa centrala la $(n) = 99,5$ - intrucit $n = 0, \dots, 199$) :
[DATE / GENERARE / COS < A=1, B=0.221016568, C=0, 200 >]

* Se calculeaza si se vizualizeaza transformata Hilbert a lui COS1, prin trecerea secventei COS1 prin filtrul digital RFI - transformator Hilbert (posibila si in modul filtru / procesare) realizata prin convolutia

$$\text{COS1HILB} = \text{COS1} * \text{HILB} :$$

[DATE / PROCESARE / CONVOLUTIE < COS1HILB, COS1, HILB >].

Se observa ca $N_{\text{COS1HILB}} = N_{\text{COS1}} + N_{\text{HILB}} - 1 = 262$.

* Se elimina din portiunile de trecere de la inceputul si sfirsitul COS1HILB cite 31 de esantioane (pentru a reveni la lungimea 200, in vederea comparatiei cu COS1, pastrind pentru aceasta si centrarea) :

[DATE / EDITARE / COPIERE < COS1HILB, COS1HILB, 31, 230 >]

* Se reprezinta, pe acelasi grafic, COS1HILB si COS1, observind defazarea $\pi/2$ introdusa de transformatorul Hilbert

[GRAFICE / VARIABLE < , COS1HILB, COS1 >]

nr.liniei spectrale	FSSSSS			FSSSSH		
	Real	Imaginar	Fazor	Real	Imaginar	Fazor
30						
31						
32						

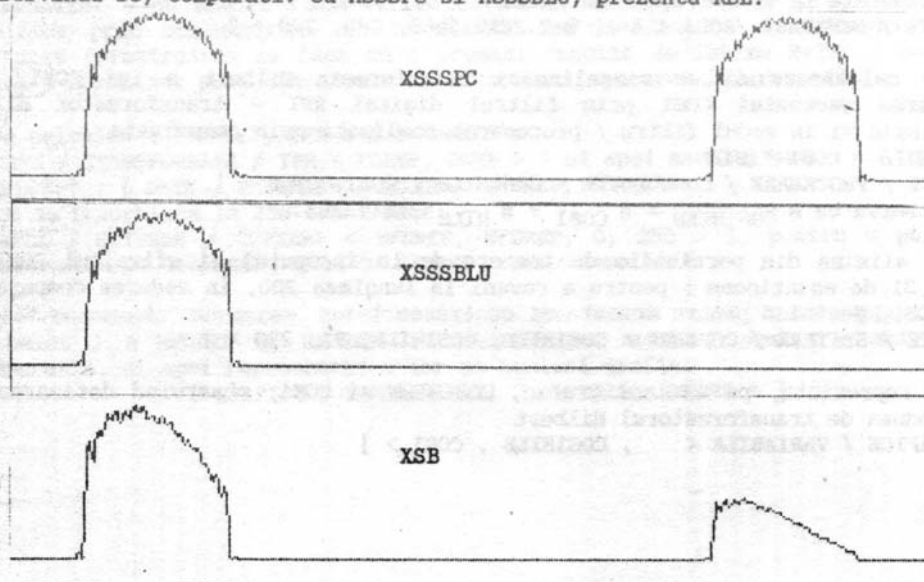
* Se revine la procesarea propriu-zisa, calculindu-se ~~semnalul~~ ~~asamblat~~ BLU, ca secventa SSSBLU avind ca parte reala SSSS si parte imaginara SSSPHILB :
[DATE / EDITARE / COMPLEX < SSSBLU, SSSS, SSSPHILB >]

* Se calculeaza si se vizualizeaza periodograma d.s.p. XSSSBLU a lui SSSBLU, observindu-se, comparativ cu XSSSPC, ca a ramas doar o singura BL din banda de baza, dar cu amplitudine dubla, filtrarea celeilalte BL fiind perfecta.

* Se verifica corectitudinea si precizia procesarii de mai sus introducind o mica eroare ; se incarca de pe disc fisierul SP2.DSP si se vizualizeaza secventa SP2, de aceeaasi lungime 262, care reprezinta SSSS cu o mica translatie, de 1 esantion.

* Se assembleaza semnalul SB de tip (BLU cu rest de banda laterala (RBL)) :
[DATE / EDITARE / COMPLEX < SB, SP2, SSSPHILB >]

* Se calculeaza si se vizualizeaza periodograma d.s.p. XSB a lui SB, observindu-se, comparativ cu XSSSPC si XSSSBLU, prezenta RBL.



Daca setul de programe PCDSP ar fi implementat si convolutia ciclica de ordin N , ar fi fost evidenta legatura intuitiva dintre secventa de intrare, tip cos, cu perioada N si iesirea tip sin legata de intrare prin functia pondere tip ctg a transformatorului Hilbert

5.2. Procesarea digitala BLU

Prezentam un "studiu de caz" al procesarii digitale BLU a unui semnal BLD prin metoda defazarii cu transformator Hilbert. Cele doua BL sint benzile spectrului de baza, cea de la frecvente pozitive [care va ramine in aceeaasi pozitie in spectrul BLU dar cu valoare dublata (avind deci aceeaasi energie cu semnalul BLD initial)] si cea de la frecvente negative (care va dispere din spectrul BLU). A nu se confunda aceasta procesare cu MA - BLU in care poate fi inasa inclusa ca baza de implementare, pentru obtinerea semalelor MA - BLU si a multiplexarilor aferente cu diviziune in frecventa cu utilizare de doua ori mai eficienta in telecomunicatii a spatiului de frecvente alocat decit la MA simpla.

* Se incarca de pe disc, din fisierul SSSP.DSP si se vizualizeaza secventa SSSP reala, construita pentru a avea BL spectrale (simetrice caci semnalul e real) net conturate, aproximativ dreptunghiulare.

{ Detalii despre modul in care s-a obtinut SSSP :

Pentru a obtine BL net conturate recurgem la o mica deplasare din zona $F=0$ prin multiplicare in timp cu o secventa cosinusoidala, deci o "MA de produs", auxiliara, care nu trebuie confundata, asa cum am aratat, cu MA cu purtatoare de inalta frecventa pentru telecomunicatii.

Pentru a obtine BL aproximativ dreptunghiulare, semnalul temporal "modulator", de baza, e de tip sinus cardinal cu pulsatie normata ($W_{sinc}=1$) $B=0,5$ de lungime $N=200$, constituit dintr-o secventa SINC (dintr-o secventa SIN de 99 esantioane, (initial de 100 esantioane dar, cu eliminarea primului prin editare / copiere a esantioanelor 1 - 99) impartita la o secventa RAMPA de 99 esantioane [incepind de la valoarea 1 (pentru a evita o impartire ulterioara la 0 in constituirea SINC), cu increment 1], impartirea facindu-se indirect prin inversarea valorilor rampei in modul nelinear / reciproc si apoi prin inmultire cu SIN.

Completam SINC cu 1-ul esantion, de valoare 1, (constituim o secventa UNU (cu 1 esantion de valoare 1) de tip impuls, la care sa adaugam, in modul editare / adaugare, secventa SINC.

Pentru o perfecta simetrie, generam secventa CNIS, simetrica (si in denumire) cu SINC, prin editare / basculare, si apoi secventa globala SSS prin con-catenarea CNIS si SINC, prin editare / adaugare.

Purtatoarea COS e cosinusoidala cu ($W_{cos} = 1$) $B = 31 \cdot 2\pi / 199 = 0,978787658$, avind 31 de perioade si 200 esantioane (nr.impar de perioade si 199 in loc de 200 la numitorul lui B - pentru simetrie perfecta, cu axa centrala la $(n) = 99,5$ - intrucit $n = (0, \dots, 199)$.

Simulam MA de produs, obtinind SSSP prin inmultirea secventa cu secventa a SSS si COS. }

* Se vizualizeaza periodograma BLD al lui SSSP, continuta in secventa XSSSPC, din fisierul XSSSPC.DSP care se incarca de pe disc.

{ Detalii despre modul in care s-a obtinut XSSSPC :Pentru secvente reale, avind deci periodograma d.s.p. para (pentru proprietatile de paritate vezi aplicatia 2.1, pag.45-curs), programul PCDSP nu afiseaza decit una din cele 2 BL ale d.s.p., in zona $F = 0 \dots 0,5$. Pentru o afisare a ambelor BL (similara cu afisarea modulului TFR - vezi verificarile de consistenta de mai sus), a trebuit ca secventa sa fie facuta, formal, complexa prin adaugarea $0,001 \cdot j$, valoare mica, ce nu modifica spectrul, la fiecare esantion al SSSP(s-a constituit, in prealabil secventa IMAG200, de tip fereastră dreptunghiulara cu inaltimea micșorata prin inmultire cu 0,001 si, apoi, secventa formula SSSPCPLX, in modul editare / complex, cu secventa SSSP ca partea reala si secventa IMAG200 ca parte imaginara). XSSSPC este deci periodograma lui SSSPCPLX, reprezentare aproximativa d.s.p.-BLD a lui SSSP }

* Se calculeaza transformata Hilbert a lui SSSP, prin trecerea secventei SSSP prin filtrul digital RFI - transformator Hilbert
(posibila si in modul filtru / procesare) realizata prin convolutia
SSSPHILB = SSSP * HILB :
[DATE / PROCESARE / CONVOLUTIE < SSSPHILB, SSSP, HILB >].

* Se vizualizeaza SSSPHILB, spre comparatie cu SSSP. (Secventa SSSPHILB e disponibila si in fisierul SSSPHILB.DSP de pe disc)
Se observa ca $N \text{ SSSPHILB} = N \text{ SSSP} + N \text{ HILB} - 1 = 262$.

* Se incarca de pe disc fisierul SSSS.DSP, si se vizualizeaza secventa SSSS care reprezinta modificarea SSSP pentru procesarea ulterioara BLU, prin prelungirea la aceeasi lungime cu SSSPHILB, pastrand-ul insa centrat, deci prin adaugarea a cite 31 esantioane 0 la stinga si la dreapta
(modul procesare / -translatie si -adaugare 0).

* Se incarca de pe disc fisierele SSSS.DSP si SSSSHILB.DSP ce contin trunchierea simetrica a secventelor SSSS, cu cite 3 esantioane, la stinga si la dreapta (realizata in modul editare / copiere) pentru a trece la lungimea 256 (putere a lui 2), in vederea TFR.

* Se calculeaza secventele FSSSSS si FSSSSH ce reprezinta TFR a secventelor SSSS si a transformatei sale Hilbert, SSSSHILB.
[DATE / TRANSFORMARE / TFR]

* Se verifica faptul ca transformatorul Hilbert digital e un defazor $\pi/2$ de banda larga (verificarea anterioara a defazorului s-a facut doar pentru o singura armonica), listind pe ecran FSSSSS si FSSSSH,
[SISTEM / TIPARIRE < FSSSSS , S > , etc.], alegind 3 perechi de esantioane spectrale, de exemplu cele numerotate 30,31,32 in liste si completind (cu doar 3 cifre exacte si cu o reprezentare grafica fazoriala aproximativa) tabelul comparativ:

Exerciții - Se propun ca exercitii dezvoltarea unor exemple care sa prezinte si alte aspecte calitative ale analizei temporale si spectrale a semnalelor, de exemplu:

- Discontinuitate in semnal (/ sau intr-o derivata de-a lui)
 - > prezenta $\delta(t)$ in derivata (/ de ordin superior)
 - > spectru infinit
- Semnal / spectru abrupt (derivate mari)
 - > spectru / semnal neted (derivate mici)
 - [la limita, $\delta(t) \leftrightarrow 1$]
- Simularea cu PCDSP a unui semnal MF
- Interpolarea a doua secvente (intreteserea esantioanelor)
- Evidentierea alierii spectrale la sub - esantionare, etc.