

ANALIZA, SINTEZA ȘI PROCESAREA SEMNALELOR DIGITALE

Introducere

Scopul lucrării – este fixarea cunoștințelor despre semnalele utilizate în electronică, cu accent pe latura calitativă a studiului.

- sunt prezentate aprofundat două “studii de caz”, dintre care “Tehnica Ferestruirii” este esențială pentru achizițiile de date în vederea măsurilor a procesărilor pentru telecomunicații, a procesărilor de imagini, etc.

Necesități hard: calculator compatibil IBM-PC

Necesități soft: - setul de programare PCDSP (“Digital Signal Processing On Personal Computers”)

- autor: Oktay Alkin,
Universitatea “Southern Illinois”
Edwardsville – S.U.A.
- setul de fișiere de date ce reprezintă
desfășurarea completă a lucrării de laborator

Memiul programului PCDSP

Sistem	Încărcare	Date	
	Salvare		Aritmetică
	Citire		Adunare
	Nucleu DOS		Secv+Secv
	Lista variabile		Const+Secv
	Stergere		Multiplicare
	Tipărire		Secv * Secv
	Restart		Const* Secv
Filtre			Conjugat
	Filtre RFI		Real
	Proiectare		Imeginar
	Analiză		Par
	Filtre RII		Impar
	Proiectare	Generare	
	Analiză		Rampă
	Procesare		Fereastră
	Extern		Rectangulară
Spectre			Triunghiulară
	Periodograme		Blackman
	Blackman-Tukey		Hamming
	Auto-regresiv		Hanning
	AR-meie mobilă		
	Medie mobilă	Impuls	
Grafice		Sin	
	Variabile	Cos	
	Opțiuni	Exp	

Reset	Normal
Încărcare	Uniform
Salvare	Nelinear
Afișare	Amplitudine
Macro	Fază
Ieșire	Sin
	Cos
	Tg
	Exp
	Ln
	Radical
	Reciproc
	Procesare
	Convoluție
	Auto-corelație
	Corelație
	Translație
	Decimare
	Înserare 0
	Adăugare 0
	Transformate
	TFR
	TFR-Inv
	TFD
	TFD-Inv
	Z-Inv
	Editare
	Copiere
	Basculare
	Adăugare
	Complex

Indicații de lucru – Selecțiile în meniu și în sub-meniu-uri se fac cu tastele-săgeți sau prin tastarea inițialei sau majusculei marcate explicit în denumirea poziției respective, după care se tastează <Enter>.

- În fiecare etapă se recomandă afișarea pe ecran a notelor explicative, accesibile prin tastarea <F1>.

Documentația explicativă pentru lucrarea de laborator – este structurată, dat fiind specificul soft al lucrării, prin întrepătrunderea – operațiunilor de executat de către student

(caractere supra-imprimare (“Bold”))

- prezentării teoretice, explicațiilor, observațiilor (caractere normale)
- detaliile specifice de utilizare a PCDSP (caractere cursive (“Italice”))

Modul de lucru – pentru a avea posibilitatea unui studiu calitativ și a face toate observațiile fără consum inutil de timp pentru operare și rulare, deși se recomandă parcurgerea tuturor etapelor din tehnologia lucrării, se poate apela în caz de dificultate sau, eventual, pentru verificare, la fișierele *.DSP de pe disc ce conțin toate rezultatele.

Conținutul referatului – un rezumat cuprinzând, principal, operațiile făcute; se recomandă respectarea succesiunii din desfășurarea lucrării, împreună cu rezultatele măsurătorilor și observațiile cerute, fără detaliile de sintaxa prezentate între paranteze paranteze drepte sau detaliile specifice de utilizare a PCDSP prezentate cu litere cursive și, doar opțional, eventuale considerații teoretice, formule sau reprezentări grafice sumare.

Desfășurarea lucrării

1. Sinteza semnalelor – se face în principal, în modul

DATE / GENERARE al PCDSP, fie prin specificare funcțional-analitică, fie dintr-un set de forme prestabilite sau secvențe aleatoare cu distribuție normală sau uniformă (vezi notele explicative, accesibile pe ecran cu tasta <F1>). Propunem ca exercițiu generarea câtorva secvențe simple.

1.1 Sinteza semnalelor prin transformare z inversă – este o metodă de sinteză indirectă, care va fi detaliată pe o aplicație din curs. Sintetizăm semnalul y_n la ieșirea unui sistem cu eșantioane:

$$\begin{aligned}
 x(t) = \sigma(t) & \xrightarrow{x_n=1} H(s) = \frac{1}{s(s+1)} & \xrightarrow{y_n=?} \\
 x(s) = 1/s & H(z) = \frac{z \cdot (1 - e^{-1})}{(z-1)(z - e^{-1})} & Y(z) = \\
 x(z) = \frac{z}{z-1} & & = \frac{z^2 \cdot (1 - e^{-1})}{(z-1)^2 (z - e^{-1})}
 \end{aligned}$$

(v.aplicația 3.4, pag108. din curs)

Programul determină ca transformata z inversă a lui $Y(z)$ specificat ca fracție rațională,

$$Y(z) = \frac{0,632121 \cdot z^2}{z^3 - 2,36788 \cdot z^2 + 1,73576 \cdot z - 0,367879}, \text{ prin împărțire continuă nelimitată a}$$

numărătorului, notat $A(y)$ a lui $Y(y)$ la numitorul sau, notat $B(z)$, (cu rezultatul aproximativ determinat în aplicația din curs și din definiția transformatei z ca serie de puteri)

$$Y(z) \approx y_1 = 0,632z^{-1} + y_2 = 1,496z^{-2} + y_3 = 2,445z^{-3} + y_4 = 3,424z^{-4},$$

Intrarea pentru PCDSP o constituie polinomul $A(z)$, scris cu puteri pozitive, scris cu puteri pozitive ale lui z , prin intermediul unei secvențe ce conține coeficienții puterilor lui z în ordinea descrescătoare a acestora din urmă. polinomul $B(z)$ de la numitor, specificat la fel, și numărul de împărțirii pe care să le facă programul, din șirul infinit de împărțirii nelimitate (s-au presupus $A(z)$ și $B(z)$ ireductibile), deci n maxim din șirul $\{y_n\}$ aproximat.

* Se încarcă de pe disc fișierul YA_.DSP, ce conține secvența A, specificație pentru A(z), [SISTEM / ÎNCARCARE <YA_>] și se listează coeficienții: [SISTEM/ TIPĂRIRE <A, (S(pe ecran))>].

* Se repetă operațiunea pt. YB_.DSP, secvența B. Se pot verifica coeficienții lui B(z) din formula analitică de mai sus

{ Secvențele A și B s-au creat în modul system / citire , cu respectarea normelor sintactice indicate și în notele explicative (accesibile cu tasta [F1]) : fiecare coeficient se introduce ca pereche (real, imaginar), coeficienții separați prin caractere”,”}

* Se calculează transformata z inversă a lui Y(z), pentru 6 eșantioane care se listează, se trec în următorul tabel și se

Compara cu valorile analitice , $y_n = n - \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}(1 - e^{-n})$, :

(vezi aplicația din curs)

y_n	calculat	analitic	y_n	calculat	analitic
y_1			y_4		
y_2			y_5		
y_3			y_6		

2. Analiza (identificarea) sistemelor prin metode de corelație

Identificarea sistemelor, prin determinarea funcției de transfer care descrie intrare-ieșire, se poate nu numai prin determinarea ieșirii la intrare tip impuls unitate, ci și prin răspunsul sistemului la alte semnale, dintre care zgomotul alb (metodă exemplificată aici) și treapta unitate (metodă de analiză a sistemelor pe baza răspunsului la treapta unitate se va detalia în lucrările de laborator următoare, în contextul analizei filtrelor).

(vezi paragraf 2.8 curs)

$$\text{Corelația } x_1(t) \text{ și } x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)x(u-t)du$$

Se aproximează (pt. $t \approx mT$)

$$r_{x_1, x_2}(m) = \sum_n x_{1,n}x_{2, (n-m)}, \text{ pt. } m = 0, \dots, (N-1)$$

Zgomotul alb, $v(t)$ [cu densitatea spectrală de putere, d.s.p, $q_v(F)$, constantă pentru $F \neq 0$, și cu medie nulă (deci $q_v(0) = 0$ și deci și $V(0)=0$), reprezentabil cantitativ prin abaterea medie pătratică σ , întrucât, în acest caz, pentru $F=0$, avem evident d.s.p, $q_v(F) = \sigma^2$] este util în identificarea sistemelor, oferind o metodă practică de determinare a funcției pondere: corelația între intrarea de tip zgomot alb și ieșirea sistemului, $v(t)$ și $y(t)$ reprezintă tocmai $h(t)$ (cu factorul de proporționalitate σ^2). Calculând , prin integrare între $+\infty$ și $-\infty$

$$r_{v,y}(t) = v(t) \text{ și } y(t) = \int (v(\alpha) * h(\alpha))v(\alpha - t)d\alpha = \int v(\alpha - t) \int h(\beta)v(\alpha - \beta)d\beta d\alpha =$$

$$\int h(\beta) \int v(\alpha - t)v(\alpha - \beta)d\alpha d\beta$$

$$v(t) * h(t) = y(t)$$

$\int v(\alpha - t)v(\alpha - \beta)d\alpha d\beta = r_{v,v}(\beta - t) = v(\beta - t) \prod v(\beta - t) = \sigma^2 \delta(\beta - t)$ (întrucât spectrul auto- corelației zgomotului alb $v(t)$ e constant, egal cu d.s.p, $q_v(F) = \sigma^2$) rezultă ca autocorelația zgomotului alb este tocmai impulsul Dirac de înălțime σ^2 .)

$$\text{Deci } v(t) \prod y(t) = \sigma^2 h(t)$$

Observații:

- trebuie evitată confuzia dintre d.s.p constanta a zgomotului alb și spectrul Fourier constant al impulsului Dirac. Doar modulul spectrului Fourier al zgomotului alb e constant.

- corelația de identificare prezentată anterior , trebuie făcută, din motivele expuse mai sus, cu exact același semnal $v(t)$ care se aplică și la intrarea sistemului analizat, și în aceeași ordine, întrucât, spre deosebire de convoluție, corelația nu e comutativă.

- comparativ cu metoda teoretică de aplicare la intrarea sistemului necunoscut a unui impuls cât mai apropiat de impulsul unitate (Dirac) ideal și măsurarea ieșirii $h(t)$ (dificultăți practice de generare și măsurare), metoda de identificare prin corelație are, în compensație, de rezolvat un calcul, într-un bloc suplimentar, corelatorul.

* Se încarcă de pe disc fișierul HN.DSP și se vizualizează secvența HN, cu 30 de eșantioane, funcția pondere de identificat.

* Se calculează și se vizualizează secvențele HNCONVHN și HNACORHN, conținând respectiv $HN * HN$ și $HN \prod HN$, pentru a observa sondările reciproce caracteristice convoluției și corelației, reglarizarea (netezirea) introdusă de convoluție, ca și analogia auto-corelație \leftrightarrow energie de interacțiune a semnalului cu el însuși, cu maximum

$HN \prod HN$ în 0 (energia, propriu-zisă a SEMNALULUI HN) (v. Paragraful 2.14 pag.53-curs)

[DATE / PROCESARE / CONVOLUȚIE (\)AUTO-CORELAȚIE, < HNCONVHN (\) HNACORHN, HN, (HN) >]]

* Se generează și se vizualizează secvența ZGOMOT, cu 300 de eșantioane, de tip zgomot alb (cu distribuție statistică normală), cu medie 0 și abatere medie pătratică 1, prin intermediul generatorului de numere aleatoare conținut în program:

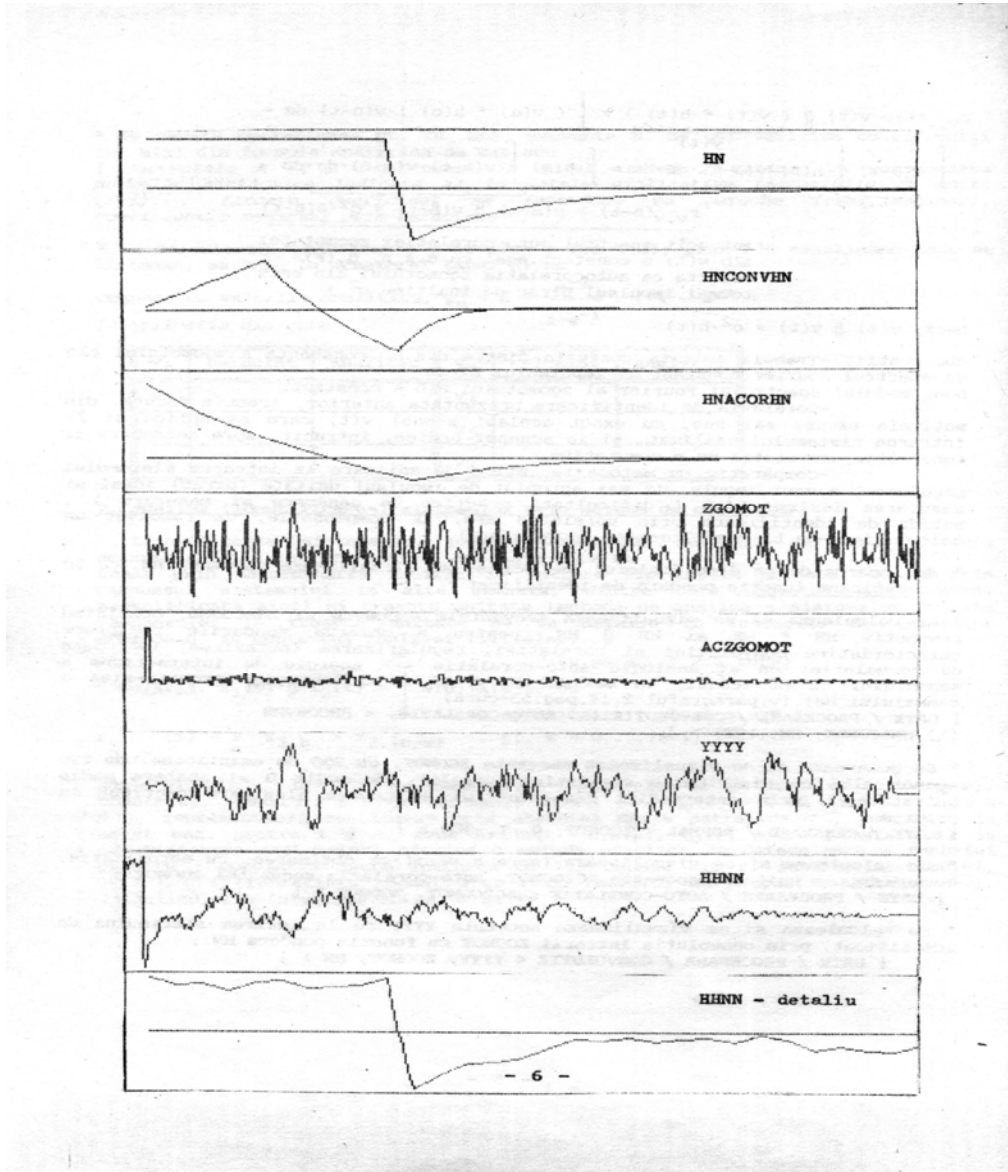
[DATE/ GENERARE/ NORMAL <ZGOMOT, 0, 1, 300 >]

* Se calculează și se vizualizează (spre a verifica obșinerea, cu aproximație, a unui impuls unitate) secvența ACZGOMOT, auto-corelația secvenței ZGOMOT:

[DATE/ PROCESARE/ AUTO-CORELAȚIE <ACZGOMOT, ZGOMOT >].

* Se calculează și se vizualizează secvența YYYY de la ieșirea sistemului de identificat, prin convoluția intrării ZGOMOT cu funcția pondere HN:

[DATE/ PROCESARE/ CONVOLUȚIE <YYYY, ZGOMOT, HN >].



* Se calculează și se vizualizează secvența HHNN, calculată, pentru identificarea sistemului, drept corelația ZGOMOT și YYYY
 (atenție la ordinea de calcul):
 [DATE/ PROCESARE/ CORELAȚIE < HHNN, ZGOMOT ,YYYY >].

* Se vizualizează, separat, doar primele 30 de eșantioane ale secvenței HHNN; spre a putea vedea, comparativ cu HN, , precizia metodei de identificare: [GRAFICE/ OPTIUNE <.. X max.=29..>]

Metode de analiză spectrală

3.1 Analiza semnalelor cu Transformata Fourier Rapidă

* Se generează o secvență "SIN64", de lungime N=64, reprezentând perioada de bază a unei sinusoide redresate

Deci ($W_{normata} =$) $B = \pi / 64 = 0,0490873852$

[DATE/GENERATE/SIN<SIN64, A=1, B=.0490873852, C=0, N=64>]

(se detaliază un exemplu tratat analitic la seminar (v. Și aplicația 3.7, pag 133-curs), în care s-au calculat coeficienții seriei Fourier a sinusoidei 0 pentru k impar [perioada efectivă este redresată, a_k

a) $a_k = 0$ pt. k impar [perioada efectivă este de 0,5 T (sinusoidă neredresată)]

b) $a_k = -2/[\pi(k+1)(k-1)]$ pentru k par

$$a_0 = 2/\pi = 0,6366197731; \quad a_2 = 2/[\pi(2^2 - 1)] = 0,212206591;$$

$$a_4 = 2/[\pi(4^2 - 1)] = 0,0424413182; \quad a_6 = 2/[\pi(6^2 - 1)] = 0,0181891364;$$

* Se vizualizează "SIN64" ca secvență discretă, observându-se numărătura tipică contextului TFR ($SIN64_0 = \sin 0, \dots$)

$$SIN64_{63} = \sin(\pi / 64)63$$

* Se calculează "FSIN64", TFR a secvenței "SIN64":

[DATE/ TRANSFORMARE/ TFR<FSIN64, SIN64>]

* Pentru comparare cu coeficienții seriei Fournier, în acest caz particular în care perioada efectivă e jumate din perioada luată în calculul seriei Fourier, $[x_{e,p}](m)/N \approx a_{2m}$ se împarte "TFR64" la 64: [DATE/ ARITMETICA/ MULTIPLICARE/ CONSTANȚĂ<TRF64, TRF64, 0.015625 (=1/64)>]

* Se listează pe ecran PSIN64: [SITEM/TIPĂRIRE/ <FSIN64, S>]

* Considerând partea imaginară ne semnificativă (spectrul unui semnal real e real), se compară primele 4 valori cu $a_0, \dots, a_6 \cdot t$

* Se pregătește FSIN64 pentru reprezentare grafică (sunt admise doar secvențe reale): [DATE/ ARITMETICĂ/ REAL <RFSIN64,FSIN64>] și se face reprezentarea grafică, observând simetria față de N/2, provenită din simetria față de N/2 a secvenței SIN64; deci, pentru aproximarea coeficienților seriei Fournier, trebuie considerată doar 1-a jumătate a secvenței FSIN64.

* Se decimează SIN64, obținându-se SIN32:

[DATE/ PROCESARE/ DECIMARE <SIN32,SIN64,2>] și se reiau etapele de analiză de mai sus, observând, creșterea erorilor de aproximare.

* Se continuă decimarea (SIN16, SIN8, SIN4) relând doar listarea valorilor, pentru comparație (inclusive cu calculele de la seminar, pt. N=4).

3.2. Calculul densității spectrale de putere

3.2.1 Metoda periodogramelor - se bazează pe teorema Weiner-Hincin: Spectrul Fourier al auto-corelației este densitatea spectrală de energie: (vezi paragraph 2.14, pag 53 din curs)

$$F[r_{11}(t)](w) = R_{11}(w) = |X(w)|^2$$

Interpretarea lui $|X(w)|^2$ ca densitate spectrală de energie rezultă din teorema Parseval (varinata Razaigh pt. semnale complexe) (vezi paragraful 1.1, formula 1.8, pag.6 din curs).

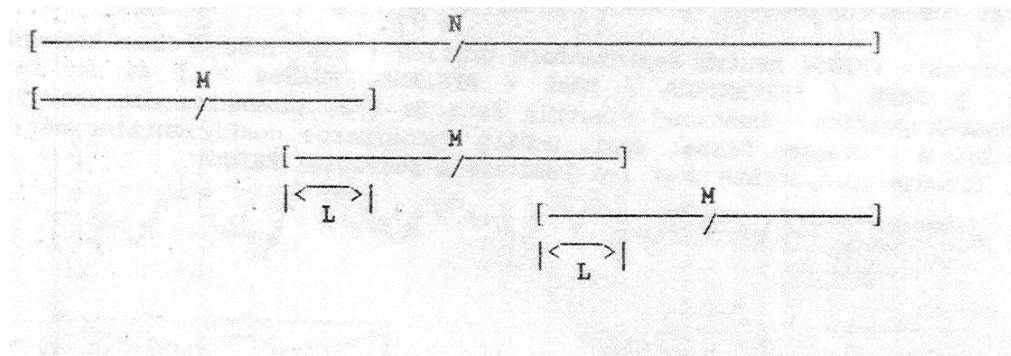
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(f)|^2 df \text{ și se numește energia semnalului } x(t)$$

Se justifică astfel calculul aproximativ (estimativ) al densității spectrale de putere ca “periodograma”:

$$q(F)_{[periodograma]} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^{N-1} x_n e^{-j2\pi F n} \right|^2 \text{ (unde } F \text{ e frecvența normalată } F = fT_{esantionare} \text{)}.$$

Împărțirea la N (durata normalată a duratei ferestrei de observație NT_{es}). Face trecerea de la densitate spectrală de energie din formulele de mai sus la d.s. de putere.

Pentru semnale nedeterminate (prezentate în detaliu la cursul de Tehnica Transmisiunii Informației), se poate arăta ca abaterea medie pătratică a estimatului d.s.p. de mai sus nu se anulează când $N \rightarrow \infty$, dar scade dacă se calculează d.s.p. ca medie a d.s.p. (metoda Welch a periodogramelor mediate) calculate pe segmente de lungime N din secvența de lungime N care se suprapun pe câte L eșantioane la capete (nu trebuie neapărat ca N-L să fie multiplu de M-L):



3.2.2 Metoda Blackman-Tukey – conține calculul bazat direct pe teorema Wiener-Hincin, al autocorelației (pe suport aproximativ la $m=-M, \dots, M$) și apoi al spectrului acesteia, cu împărțire la durata secvenței:

$$q(F)[Blackman - Tukey] = \frac{1}{N} \cdot \sum_{m=-M}^M r_{xx}(m) \cdot e^{j2\pi F m}$$

Metoda estimării spectrale auto-regresive – conține calculul aproximativ al unui filtru digital recursive, cu o funcție de transfer fără zerouri în planul z, care, cu zgomot alb la intrare, să furnizeze la ieșire secvența de date respectivă.

Zgomotul alb, prezentat anterior, (vezi și notațiile convenite) este util în această metodă prin relația spectrală de tip produs algebric dintre intrare- funcție de transfer- ieșire, scrisă pentru d.s.p:

$$q_x(F) = |H(F)|^2 q_v(F),$$

$$\text{Particularizată: } q_x(F) = |H(F)|^2 \sigma^2$$

Întrucât calculul filtrului, prin $|H(F)|^2$, duce la un rezultat direct proporțional, prin σ^2 , cu d.s.p cauatată.

Se calculează un filtru, ales doar cu poli în planul z,

$$H(z) = \frac{1}{1 + b_1 z^{-2} + \dots + b_M z^{-m}} \text{ pentru simplificarea sistemului de ecuații recursive}$$

$$\text{“regresiv” corespunzător: } x_n - \sum_{m=1}^M b_m x_{(n-m)} + v_n$$

Dîndu-se secvanța de intrare, $\{x_n\}$, ;I ordinal N al filtrului, se calculează coeficienții b_m al filtrului (evident adaptat la forma semnalului de la ieșire) și σ (care reprezintă cantitativ zgomotul alb de la intrare); coeficientul b_M se zice “coeficient de reflexie”.

Cu $z = e^{j2\pi f}$ se calculează direct $|H(F)|^2$ și apoi estimatul d.s.p.

Implementarea metodei se face prin 2 algoritmi de calcul care diferă mai ales în modul de rezolvare a sistemului recursive de tip “predicție liniară” de mai sus: algoritmul Yule-Wlaker și algoritmul Burg, dintre care utilizatorul este invitat să aleagă.. În ambele cazuri, Akaike a demonstrat că, pentru o estimare optimă a d.s.p., dintre valorile lui M trebuie aleasă cea pentru care $(\ln \sigma) + M / N$ rezultă minim.

3.2.3 Metoda estimării spectrale auto-regresive cu medie mobilă e o variantă a celei prezentate anterior, de data aceasta cu filtru digital fără poli în planul z,

$$H(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_M z^{-M}, \text{ sistemul de ecuații generic,}$$

$$x_n = v_n + \sum_{m=1}^M a_m x_{(n-m)}, \text{ rezolvându-se prin metoda Durbin, care include o etapă Yule-}$$

Walker de ordinal I.

L este “mobil” (poate fi ales de utilizator): $M \ll L \ll N$.

4.Tehnica ferestruirii

Prelucrările în timp real asupra semnalelor oarecare eșantionate tipice în telecomunicații digitale, măsurări, și achiziții de date, procesări de imagine, etc., necesită observații finite, de lungime N (limitat inferior de caracteristicile domeniului specific de semnale de procesat și superior de costuri/tehnologie).

Pe lângă filtrarea spectrală de gardă asupra semnalului, (FTJ la $f_{\text{esantioane}}/2$),conform criteriului Nyquist), se impune deci și o filtrare temporală de gardă (trunchiere în timp, pe care o vom numi “ferestruire” pentru a deosebi de filtrarea spectrală) la N eșantioane/ observație, de exemplu pentru un transformator Hilbert sau Fourier numeric de ordin N.

Semnalul de procesat va fi deci aproximat prin trunchiere. În următoarea “fereastra temporală” de lungime $N \cdot T_{\text{esantioane}}$ se face o nouă observație (achiziție), urmată de un nou calcul de procesare.

În general , pentru a spori viteza de prelucrare la un anumitN, sau a permite mărirea lui N la aceeași viteză de prelucrare, achiziția unei noi secvențe se face în paralel cu calculul secvenței precedente (viteza de achiziție e în general mai amre decât viteza de calcul).

Trnchierea propri-zisă (reținerea a N eșantioane păstrându-le întocmai valoarea) are unele dezavantaje tipice seriilor Fourier trunchiate, cu care asemănarea

se face pe baza dualității timp-frecvență. Astfel, seriile Fourier trunchiate la un număr finit de coeficienți spectrali, aproximează neconvenabil discontinuitatea semnalelor periodice. Pentru un tren de impulsuri dreptunghiulare periodice, semnalul aproximat sintetizat cu un număr finit de coeficienți spectrali are supracreșteri în aproximarea flancurilor care nu scad sub 17 %, chiar dacă numărul de coeficienți cu care sintetizăm aproximanțul crește și supracreșterea devine tot mai îngustă – “fenomenul Gibbs”.

Semnalul sintetizat cu un număr finit de coeficienți spectrali corespunde în spectru cu o trunchiere (ferestruire) dreptunghiulară deci aproximanțul convoluția aproximanțului cu sinus cardinal, ondulațiile aproximanțului și supracreșterile în dreptul flancurilor fiind datorate lobilor laterali destul de pronunțați pe care îi are sinus cardinal.

Dual, trunchierea în timp de tip fereastră dreptunghiulară corespunde cu supracreșteri spectrale nedorite.

Se justifică deci utilizarea trunchierii temporale, cu ferestre de pondere optimizate pe diferite criterii.

Regularizarea prin convoluție este nedorită dacă se dorește rezoluție mare în evidențierea oricărei discontinuități spectrale.

Pentru rezoluție mare, trebuie ca lobul principal al spectrului ferestrei să fie foarte îngust – durata mare a ferestrei)

Pentru ripluri mici trebuie ca lobi laterali ai spectrului ferestrei să fie foarte scunzi (-netezime mare a ferestrei în timp).

Cele două cerințe sunt contradictorii: plecarea/sosirea în extremități cu netezime cât mai mare (derivate nule până la un ordin tot mai mare) înseamnă racordare cu un clopot central al ferestrei tot mai îngust (deci locul central al spectrului se lățește)

O apreciere globală a ferestruirii $x(t)f(t)$ a unui semnal $x(t)$ cu o fereastră $f(t)$ este dată de abaterea spectrală.

$$A(\omega)=[X(\omega)*F(\omega)]-X(\omega)$$

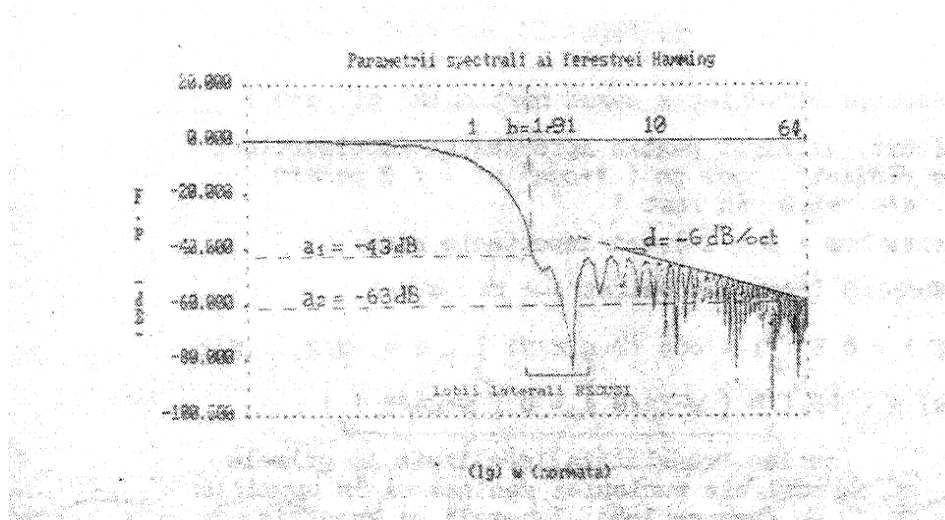
Caracterizarea spectrală a ferestrei se face și cu parametrii:

b – frecvența la care lobul principal cade la valoarea de vârf a lobilor laterali (în unitați logaritmice, normata prin înmulțire cu durata ferestrei)

a1) - valoarea de vârf a lobilor laterali (în [dB], relative la valoarea de vârf a lobului central)

a2) - valoarea lobilor laterali la frecvența relativă 64 (la care se poate considera că s-a atins comportamentul asimptotic în descreșterea lobilor laterali.)

d – panta de descreștere asimptotică a anvelopei lobilor laterali (în dB/ octava sau dB/Decada cu scările de reprezentare de mai jos)



Considerând ferestruirea unui semnal eșantionat

$x_e(t) = x(t)\sigma_T(t)$, $x(t)\sigma_T(t)f(t)$, putem, asociativ, că considerăm prelucrarea în ansamblu ca produs, să considerăm prelucrarea în ansamblu ca produs al $x(t)$ cu fereaștră eșantionată:

$f(t)q_T(t) = \sum f(nT)\sigma(t - nT)$ și deci spectrul semnalului eșantionat și ferestruit este:

$$x(w) * F_e(w) = F(w) * \left[\frac{2\pi}{T} \sigma_{2\pi/T}(w) \right]$$

a) Fereaștră dreptunghiulară

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{pt. } n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

$$F_e(w) = D(w) = e^{-j\frac{N-1}{2}w} \cdot \frac{\sin\left(\frac{N}{2}w\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

(„nucleul Dirichlet” care va fi evidențiat și în calculul spectral al celorlalte ferestre)

Pe lângă fereaștră dreptunghiulară (Dirichlet) amintim, fără să detaliem, o altă fereaștră simplă, fereaștră triunghiulară (Bartlett), de tip rampă descrescătoare utilizată și ea în analizele nepretențioase (ale proceselor (semnalelor) liniare)

b) Ferestrele în \cos^α (α natural, usual între 1 și 4)

Au avantajul unei generări simple și al unei identificări proprietarilor transformăției funcțiilor cosinus.

$$f_n = \begin{cases} \cos^\alpha(n\pi/N) & \text{pt. } n = -N/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, N/2 \\ 0 & \text{in rest} \end{cases}$$

(deci fereaștră Dirichlet e cazul particular pt. $\alpha=0$)

[un semnal înrudit, utilizat pentru aproximarea impulsurilor, este “cosinus ridicat”, egal cu $(1 + \cos^\alpha wt)/2$ pentru $t = -\pi/w, \dots, \pi/w$ și 0 în rest]

Pe lângă fereastra $\cos(\alpha = 1)$, mai importante sunt:

b1) Fereastra Hanning (cosinus pătrat) – pt. $a=2$

$$f_n = \cos^2(n\pi/N) = 0,5[1 + \cos(2n\pi/N)], n = -N/2, \dots, N/2$$

$$F_e(w) = 0,5.D(w) + 0,25.[D(w - 2\pi/N) + D(w + 2\pi/N)]$$

$D(w - 2\pi/N) + D(w + 2\pi/N)$ - se numesc nuclee translatate, localizate în primele zerouri ale nucleului central și în opoziție de fază cu lobii laterali și acestuia → anularea parțială a lobilor laterali și se folosește principiul ferestrelor \cos^α

b1 ‘) Fereastra Hamming - derivate din fereastra Hanning pe principiul anulării parțiale a lobilor laterali

$$f_n = \beta + (1 - \beta)\cos(2n\pi/N)$$

(fereastra Hanning e caz particular al ferestrei Hamming pt. $\beta = 0,5$)

$$F_e(w) = \beta.D(w) + 0,5(1 - \beta)[D(w - 2\pi/N) + D(w + 2\pi/N)]$$

b1’’) Fereastra Hamming propriu-zisă respectă condiția

$$f_0 = 1 \Leftrightarrow [\beta + (1 - \beta) = 1]$$

Principal, 1-ul lob lateral care poate fi anulat e centrat în jurul lui $5\pi/N$ [și nu la $3\pi/N$ care rămâne în lobul principal lățit (această lățire e dezavantajul complementar avantajului dat de netezirea spectrului ferestrei)].

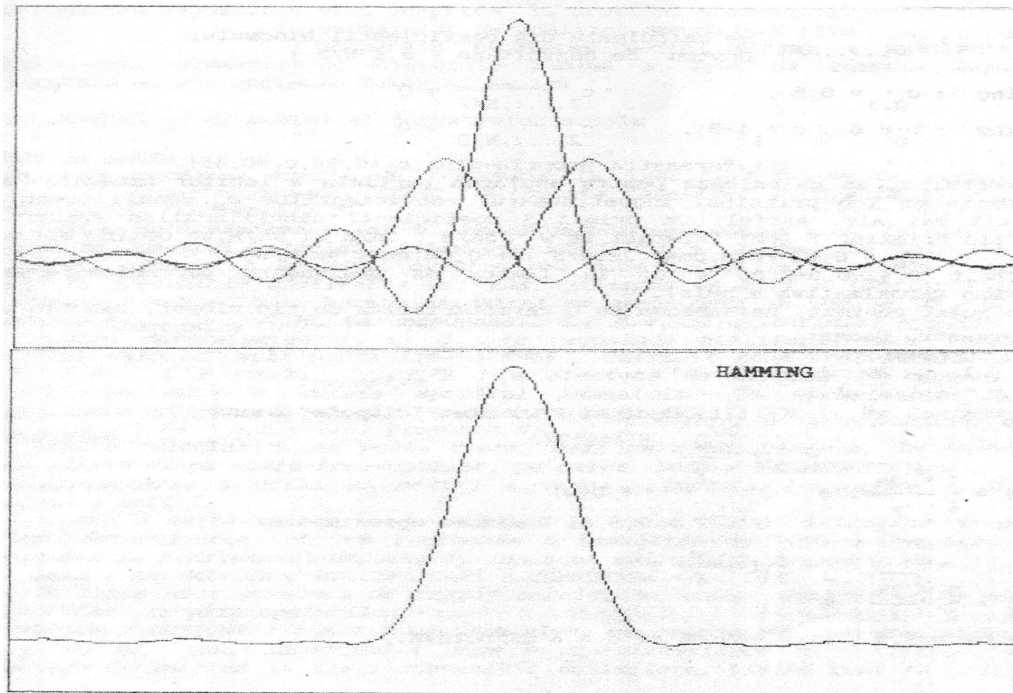
Așa se ilustrează mai jos, maximele celor două spectre laterale sinc adăugate la dreapta și la stânga nucleului central sinc Dirichet, compensează cu primul și, respectiv, cel de-al doilea minim local, maximul local principal de la $w = 5\pi/N$, anulând astfel $F_e(w)$ la această pulsație. Se obține profilul spectral scontat, netezit, dar cu o lățime a lobului central.

Considerând, aproximativ, ca extremele locale ale celor trei funcții sinc sunt la $(2k + 1)\pi/N$, ecuația de compensare este

$$\frac{1 - \beta}{2} \left(\frac{N}{3\pi} + \frac{N}{7\pi} \right) = \beta \frac{N}{5\pi} \Leftrightarrow \beta = 25/46 = 0,543478261.. \approx 0,54$$

Astfel ca fereastra Hamming propriu-zisă e

$$f_n = 0,54 - 0,46.\cos(2n\pi/N)$$



Față de fereastra Dirichlet, înrautățirea b (deși lobul central se lățește practic cu mai puțin de $b_{Hamming} / b_{Dirichlet}$ față de fereastra Dirichlet căci b e raportat la 1-ul lob lateral care scade semnificativ) e însoțită de o importanță (de peste 30 de ori) a atenuării lobilor laterali.

c) Fereastra Blackman

$$f_n = \sum_{m=0}^{N/2} c_m \cos(2\pi \cdot m \cdot n / N) \quad n = -N/2, \dots, N/2, \text{ cu } \sum_{m=0}^{N/2} c_m = 1$$

$$F_e(w) = \sum_{m=0}^{N/2} (-1)^m \frac{c_m}{2} [D(w - 2\pi \cdot m / N) + D(w + 2\pi \cdot m / N)]$$

Ferestrele Blackman reprezintă deci generalizări ale celor prezentate până acum:

Dirichlet: $c_0 = 1, \quad c_{1, \dots, N/2} = 0$

\cos^α : $c_{0, \dots, N/2}$ se calculează din coeficienții binomului Newton de dezvoltare ($\alpha \leq N/2$)

Hanning: $c_{0,1} = 0,5 \quad c_{2, \dots, N/2} = 0$

Hamming: $c_0 = \beta, c_1 = 1 - \beta \quad c_{2, \dots, N/2} = 0$

(pt. Fereastra propriu zisă, $c_0 = 0,54, c_1 = 0,46$)

În general c_m se calculează pentru anularea parțială a lobilor laterali. Pentru a realiza un lob principal îngust, numărul coeficienților c_m nenuli trebuie să fie cât mai mic.

Alfel, cu primii 3 coefienți nenuli, anulând spectrul în centrele primilor 3 lobi laterali, la $w = 5\pi / N, 7\pi / N$ și $9\pi / N$, se obține aproximativ.:

$$f_n = 0,42 + 0,5 \cdot \cos(2\pi \cdot n / N) + 0,08 \cdot \cos(4\pi \cdot n / N)$$

(întrucât $0,42 - 0,5 + 0,08 = 0$, la limita de prelungire periodică, fereastra Blackman aproximativă e nulă).

În acest context, deasemenea cu o caracteristică de tip clopot, amintim și:

d) Fereastra Gauss:

$$f_n = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r \cdot 2n}{N}\right)^2} \quad (f(t), \text{ deci și } F(w) \text{ sunt "clopote" Gauss)}$$

$$F_e(w) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{r} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{w}{r}\right)^2} * D(w)$$

Pt. $r > 2,5$ și w mic, se aproximează:

$$F_e(w) = \frac{N}{2} \frac{\sqrt{2\pi}}{r} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{w}{r}\right)^2}$$

Pentru $r=3,5$, $a_1 = -69\text{dB}$ și $d=6\text{ dB/octava}$.

e) Ferestre adaptate la domeniul semnalelor de analizat

e1) Ferestre Tseng – se determină prin impunerea unor condiții de lățime a lobului principal și înălțime a lobilor laterali, eventual cu frecvențe impuse de anulare, (care permit, de exemplu, o rezoluție sporită în vecinătatea imediată a liniilor spectrale principale ale semnalului $x(t)$ de analizat), spectrul ferestrei fiind deci încadrat într-un gabarit de tip "filtru trece jos" și sintetizat pe tipicul teoriei electrice, cu polinoame Cebîșev.

Fereastra temporală se determină de aici prin transformarea Fourier inversă.

e2) Ferestre Kaiser-Bessel – dintre ferestrele de aceeași durată, aceasta e adaptată la semnalele cu durată respectivă și o anumită bandă. Formula ei, în care e considerată banda, a fost detrimată de Kaiser cu ajutorul funcției Bessel de primul ordin modificată.

e3) Ferestre Papoulis – sunt adaptate la profilul spectral al semnalelor de analizat, specificat prin dispersia (abaterea medie) minimă a spectrului. La o durată dată, fereastra cu dispersie minimă e dată de formula Papoulis, cu variantele ei sub-optimale Tukez și Parzen.

4.2 Studiul experimental al ferestrelor uzuale

Modul de lucru

Se face scarii de frecvență la înmulțind frecvența normată (la $f_{esant.}$) a periodogramei, NFREQ, cu durată ferestrei (normată la $T_{esant.}$), obținându-se frecvențele F .

Pentru determinarea a_1 și b se recomandă utilizarea unor ferestre scurte, astfel ca spectrul calculate, între $0 < \text{NFREQ} < 0,5$ să cuprindă doar 1-a decadă a lui F , pentru a se putea observa mai bine detaliile (pentru tipurile de ferestre prezentate cantitativ mai sus, valoarea de vârf a lobilor laterali e în decadă $1 < F < 10$). Durata ferestrei se alege deci în jur de $10/0,5=20$.

Propunem $N_{fereastra} = 30$, mai convenabil d.p.d.v al criteriului Nyquist.

Pentru determinarea a_2 și d se recomandă utilizarea unor ferestre cu spectrul calculate mult peste limita $F=64$, întrucât zona frecvențelor extreme,

$f \ll 0,5$, ($F \ll N_{\text{fereastra}} / 2$) e afectată de alierea la capătul benzii eșantionare și periodizare în vederea analizei TFD(TFR). Se recomandă deci $N_{\text{fereastra}} > 64 / 0,5 \approx 128$. Propunem $N_{\text{fereastra}} = 200$.

Pentru calculul d, se poate trece, deși nu e obligatoriu, la reprezentare logaritmică și pe scară frecvenșelor, pe calea DATE / NELINIAR/ LOG [reprezentarea e utilă și pentru a vedea asimptota (-anelopa) liniară la frecvențe mari].

Pentru a evita saturarea la -100 dB pe curba d.s.p introdusă de program, pentru determinarea d se recomandă o înmulțire cu 1000 a ferestrei (cel puțin pentru Blackman și Hanning), înainte calcului periodogramei:

([DATE/ ARITMETICA/ MULTIPLICARE/ CONSTANȚA<.1000 ..>])

În lipsa unor cursoare de trasaaj parallel cu axele, determinările pe graphic se pot face și prin opțiunile (GRAFICE/ OPTIUNI /) X,Y; min,max alese pe coordonata reprezentativă pentru $a_{1,2}, b, d$, sau, încadrând (după o pre-vizualizare cu opțiunile "Auto") punctele de interes în fișii convenabil delimitate, tinând cont ca grila are 5 x 5 linii (ex. pentru a măsura d.s.p. de -32, 5 dB la $F=2,1$ poate fi convenabilă Y min. = -35, Y max. = -30 și

X min. = 2 X max. = 2,5 etc.)

Pentru determinarea lui d, se recomandă încadrarea între ($F_{\text{min.}} =$) min. 45 și ($F_{\text{max.}} =$) X max. = 90 (deci o octavă, în al cărei centru geometric se află $F = 64 \approx 45\sqrt{2} = 90 / \sqrt{2}$).

Măsurători în laborator

* Se generează, se vizualizează și se studiază experimental ferestrele Dirichlet, Bartlett, Blackman, Hamming și Hanning:

- DATE/ GENERARE/ FEREAȚRĂ/ <tip>, apoi
- SPECTRU/ PERIODOGRAMA ..<ferestruire rectangulară>, <scalare logaritmică>..

* Se completează tabelul

Tipul ferestrei	Parametrii caracteristici			
	$a_1[dB]$	b	$a_2[dB]$	d[dB/oct]
Dirichlet				
Bartlett				
Blackman				
Hamming				
Hanning				

* Se generează un semnal "xma" cu modulație de amplitudine, bandă laterală + purtătoare (MA BLD+P),

- de lungime $512 \cdot T_{es}$, (N=512)

- cu purtătoare cosinusoidală, "xp", 25 perioade/secvențe:

- observație: alegând un semnal cu (anti -) simetrie față de N/2, spectrul aproximativ e simetric, ca și cel al semnalului ne-aproximat

Parametrul $B = \frac{25 \cdot 2\pi}{512} = 0,30679616$ și se numeste pulsația normalată:

$$W_p (= w_p \cdot T_{\text{esantionare}})$$

- observație: pentru a respecta condiția Nyquist, trebuie ca $F < 0,5$, deci $W(=B) < \pi$, dar se recomandă o valoare mult mai mică, (cu cel puțin un ordin de mărime) dată fiind aproximarea suplimentară introdusă de fesențuire.

[DATE/GENERARE/ COS <XP, A=1, B=0.30679616, C=0 >]

- cu semnal modulator, “xm”, 2 perioade/ secvanța:

$$w_m = B = \frac{2 \cdot 2\pi}{512} = 0,024543693 \text{ [generat analog cu “xp”]}$$

- cu indice de modulație $m=0,4$ [“xm” se prelucrează prin:

- înmulțire cu 0,4: DATE/ ARITMETICĂ/ MULTIPLICARE/ CONSTANȚĂ <XM, XM, 0,4>

- sumare cu 1: DATE/ ARITMETICĂ/ ADUNARE/ CONSTANȚĂ <XM, XM, 1>

- “xma” se obține prin produsul “xp” cu “xm”:

[DATE/ ARITMETICĂ/ MULTIPLICARE/ SECVENȚĂ <XMA, XP, XM>]

- * Se calculează periodograma, cu ferestre Dirichlet și Hanning:

[SPECTRU/ PERIODOGRAMA <Segment' 512, R, (respectiv A),>

(scara liniară pt. d.s.p.): 1, XDXMA (respectiv XAXMA)]

- * Se reprezintă graphic cele două periodograme (e suficient și “plot direct”: <F2>), observând:

- dezavantajul ferestrei Hanning: - pierderea rezoluției spectrale cu lățimea zonei spectrale din jurul frecvenței ourtătoare până la inglobarea celor două benzi laterale, și
- avantajul ferestrei Dirichlet (rezoluția) (pentru aceasta se poate comuta între trasarea continuă și discretă a spectrului, cu GRAFICE/ OPTIUNI/ C (respectiv D),..

(e suficient pt. comutare să tastați <ESC> după ce ați mai coborât 1-2 poziții în submeniul GRAFICE/ OPTIUNII), observând în spectrul d.s.p discret XDXMA purtătoare și cele două linii spectrale laterale.

- * Se verifică pe spectrul d.sp. discret XDXMA, ca cele două linii spectrale laterale au înălțimea aproximativă

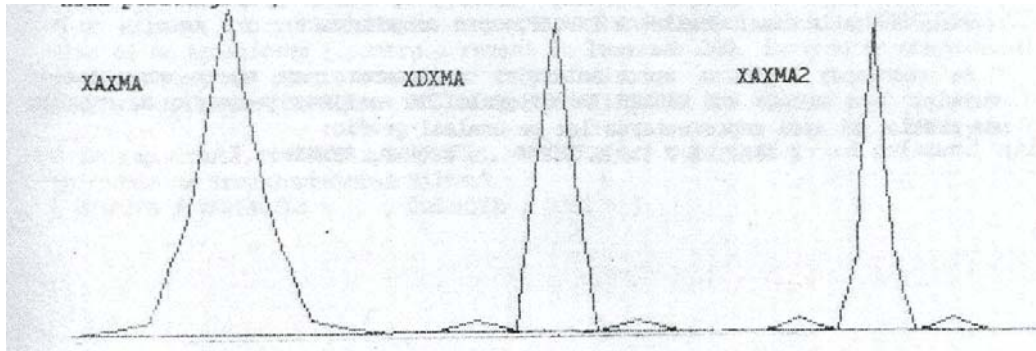
$$(m/2)^2 = 0,04, \quad (m/2 \text{ în spectrul Fourier}) \text{ relative la purtătoare}$$

Observație: Cu acest exemplu nu se poate observa celălalt aspect, al metezimii spectrului [fără prezența unor ripluri care indică componente spectrale false (deși, la spectrele “netede” obținute cu celelalte ferestre, lățimea zonelor spectrale înseamnă tot componente spectrale false)], care, în mod dual, face ca fereastra Hanning să fie mai avantajoasă, așa cum se poate vedea din studiul comparative următor.

Pentru a preveni astfel de pierderi de rezoluție, e indicată, pe de-o parte ridicarea curbei logaritmice a d.s.p și , pe de-altă parte, prelungirea observației asupra semnalului analizat (spectrul propriu va intra în convoluție cu spectrul mai îngust al unei ferestre de durată mare, al cărui lob principal e mai îngust decât pasul rezoluției spectrale cerute)

- * Se dublează lungimea secvenței “xma”:

[DATE/ EDITARE/ ADĂUGARE <XMA2,XMA,XMA>], observând ca noua periodograma, "XAXMA2", cu fereastra Hanning, decelează cele 2 BL.



Studiu comparativ al ferestrelor

* Se generează o secvență "CC" de lungime $N=256$, cu spectrul cu 2 linii egale la $F=0$ și $F=5/256=0,1953125$: $cc_n = 1 + 2 \cos B \cdot n$ cu $B = 5 \cdot 2\pi / 256 = 0,122718463$ (5 perioade/secvența):

[DATE/ GENERARE/COS<CC, A=2, B=0,122718463, C=0>, apoi
DATE/ ARITMETICĂ/ ADUNARE/ CONSTANȚĂ <CC,CC,1>]

* Se calculează periodogramele XDCC, XTCC; XBCC, XHCC și XACC, ale lui CC, cu toate tipurile de ferestre și scara logaritmică <.tip2..> pentru d.s.p

* Se vizualizează comparative câte doua periodograme, între ($K_{\min} =$) X min.=0 (sau "Auto") și ($F_{\max} =$) X max.=0.05), notând observațiile făcute și ordinea descrescătoare pe criteriile de optim:

a) rezoluție, b) l-ul riplu c) lățirea zonelor spectrale

Verificări de consistența TFR – periodograme d.s.p

* Se generează o secvență dreptunghiulară "DREP" de lungime $N=32$ (durată relative scurtă \leftrightarrow) spectru relative larg, mai ușor de observat):

[DATE/ GENERARE/ FEREASTRĂ/ RECTANGULARĂ <DREP,64>]

* Se calculează "XDREP", periodograma d.s.p a lui DREP, cu scara liniară (tip 1):

[SPECTRU/ PERIODOGRAMA <DREP, R, 1, XDREP>]

* Se calculează "RXDREP", radical din XDREP, pentru a obține, conform teoremei Wiener-Hincin, estimatul modului spectrului:

[DATE/ NELINIAR/ RADICAL <RXDREP,XDREP>]

* Se prelungeste DREP, la $N=512$ eşantioane, cu secvența de $(512-32)=480$ eşantioane 0 (pentru a obține o secvență TFR de 512 eşantioane, din care 1-a jumătate, având exact 256 eşantioane cât lungimea fixă a periodogramelor, să poată fi comparată cu RXDREP):

[DATE/ PROCSARE/ ADĂUGARE/ 0<DREP, DREP,480>]

- observație: spectrul TFR sau d.s.p. a unui semnal (inerent de tip impuls generalizat – cu support finit – în contextual acestui set de programe) nu se

modifică prin prelungirea lui la stânga sau la dreapta cu secvențe 0, întrucât ferestruirea se face cu aceeași funcție de lățime $N=256$ (spectrul exact e aproximat prin convoluție cu un același spectru al ferestrei).

* Se calculează “FDREP”, TFR a lui “DREP”:

[DATE/ TRANSFORMARE/ TFR <FDREP, DREP>] și apoi modulul sau, “MFDREP”: [DATE/ NELINEAR/ NODUL/ <MFDREP, FDREP>], care se trunchiază la 256 de eșantioane:

[DATE/ EDITARE/ COPIERE/ <MFDREP, MFDREP, 0, 255>], pentru a putea fi reprezentat pe același graphic cu RXDREP, spre comparație.

* Se recomandă normarea aproximativă (nu exact căci apare suprapunerea curbelor) a MFDREP și RXDREP la valorile lor maxime, pentru o mai ușoară comparație, și apoi reprezentarea lor pe același graphic:

[GRAFICE/ VARIABLE < MFDREP, RXDREP>]

5)Procesarea semnalelor

Procesarea semnalelor e tratată de programul PCDSP drept convoluție cu o secvență oarecare ce poate fi asimilată și cu funcția pondere temporală (răspunsul la impulsul unitate) a unui filtru digital.

* Se încarcă de pe disc fișierul HTLB și se vizualizează secvența HTLB care conține funcția pondere temporală (răspunsul la impulsul unitate) a unui transformator Hilbert digital de ordin 63 (obținut ca filtru RFI, cu secșiunea FILTRE a setului de programare PCDSP, care va fi aprofundată în următoarele lucrări de laborator). Formula analitică a funcției pondere, pe baza căreia secvența HTLB se poate obține și direct, dar mai laborios, este:

$$s_{n(=0-62)} = \begin{bmatrix} 0 & pt. \\ \frac{1}{N} ctg \frac{n\pi}{N} & pt. n \text{ impar} \end{bmatrix} \text{ v. paragrafele 3.9 (și 2.15) din curs,}$$

generată în HTLB prin translare pentru centrare pe $n=31$ (în vederea acestei centrări s-a ales N_{HTLB} impar).

Reamintim că, la observații / achiziții / procesări pe secvențe de N eșantioane, se recurge adesea la centrarea temporală convențională pe $N/2$ pentru a putea trata și aspecte de paritate sau cauzalitate în domeniul temporal.

Dual, în TFR (și în periodogramele d.s.p. de 512 linii, calculate (doar) pentru secvențe complexe), în a doua jumătate a secvenței se găsește, traslată cu N poziții la dreapta, zona spectrală a frecvențelor negative.

* Se generează secvența cosinusoidală COS1 cu ($w \cos =$) $B = 7 \cdot 2\pi / 199 = 0,221016568$, având 7 perioade și 200 eșantioane (nr. impar de perioade și 199 în loc de 200 la numitorul lui B – pentru simetrie perfectă, cu axa centrală la $(n)=$ întrucât $n=0, \dots, 199$):

[DATE/ GENERARE/COS <A=1, B=0,221016568, c=0,200>]

* Se calculează și se vizualizează transformata Hilbert a lui COS1, prin trecerea secvenței COS1 prin filtrul digital RFI – transformator Hilbert (posibilă și în modul filtru / procesare) realizată prin convoluția $COS1HTLB=COS1*HTLB$:
 [DATE/ PROCESARE/ CONVOLUȚIE <COS1HTLB, COS1,HTLB>],

Se observă că $N_{COS1HTLB} = N_{COS1} + N_{HTLB} - 1 = 262$

* Se elimină din porțiunile de trecere de la începutul și sfârșitul COS1HTLB câte 31 de eșantioane (pentru a reveni la lungimea 200, în vederea comparației cu COS1, păstrând pentru aceasta și centrarea)

[DATE/ EDITARE/ COPIERE <COS1HTLB,COS1HTLB,31,230>]

* Se reprezintă, pe același graphic, COS1HTLB și COS1, observând defazarea $\pi/2$ introdusă de transformatorul Hilbert

[GRAFICE/ VARIABLE <COS1HTLB, COS1>]

Nr.liniei spectrale	FSSSSS			FSSSSH		
	Real	Imaginar	Fazor	Real	Imaginar	Fazor
30						
31						
32						

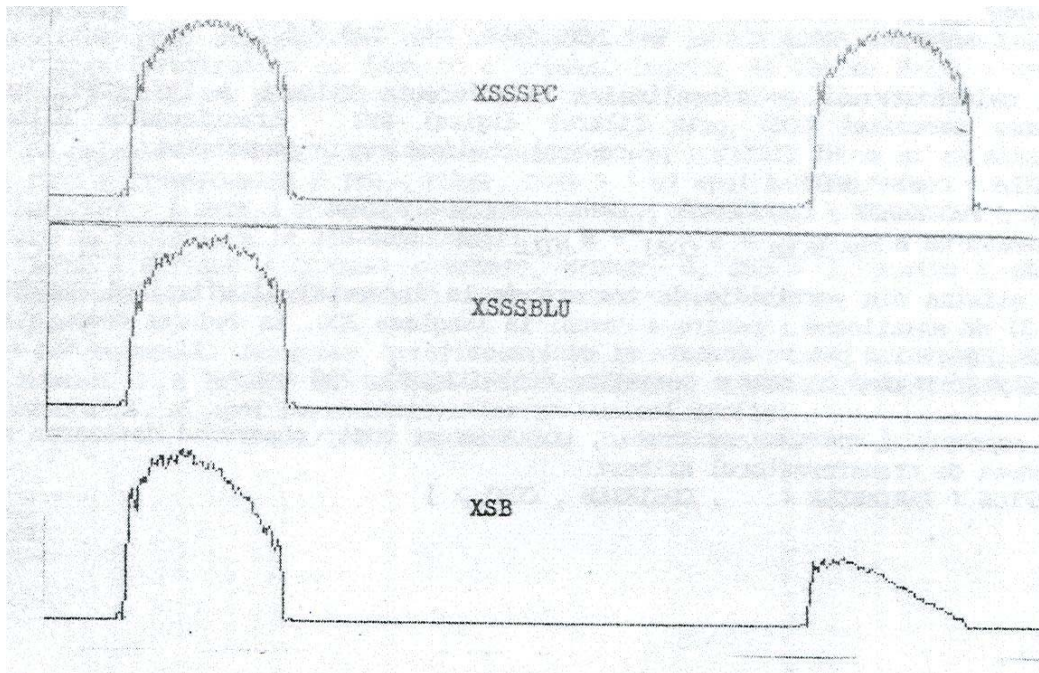
* Se revine la procesarea propriu-zisă, calculându-se semnalul asamblat BLU, ca secvența SSSBLU având ca parte reală SSSS și parte imaginară SSSPHILB:

[DATE/ EDITARE/ COMPLEX < SSSBLU, SSS, SSSPHILB>]

* Se calculează și se vizualizează periodograma d.s.p. XSSSBLU a lui SSSBLU, observându-se, comparativ cu XSSSPC, ca a ramas doar singură BL din banda de baza, dar cu amplitudine dublă, filtrarea celeilalte BL fiind perfectă.

* Se verifică corectitudinea și precizia procesării de mai sus introducând o mică eroare; se încarcă de pe disc fișierul SP2_.DSP și se vizualizează secvența SP2, de aceeași lungime 262, care reprezintă SSSS cu o mică translație, de 1 eșantion.

* Se calculează și se vizualizează periodograma d.s.p XSB a lui SB, observându-se, comparativ cu XSSSPC și XSSSBLU, prezența RBL.



Dacă setul de programe PCDSP ar fi implementat și convoluția ciclică de ordin N , ar fi fost legătură intuitivă dintre secvența de intrare, tip cos, cu perioada N și ieșirea prin funcția pondere tip ctg a transformatorului Hilbert.

5.2 Procesarea digitală BLU

Prezentăm un “studiu de caz al procesării digitale BLU a unui semnal BLD prin metoda defazării cu transformator Hilbert.”

Cele două BL sunt benzile spectrului de bază, cea de la frecvențe pozitive [care va rămâne în aceeași poziție în spectrul BLU dar cu valoare dublată (având deci aceeași energie cu semnalul BLD inițial)] și cea de la frecvențe negative (care va dispune din spectrul BLU).

A nu se confunda această procesare cu MA-BLU în care poate fi însă inclusă ca bază de implementare, pentru obținerea semnalelor MA-BLU și a multiplexărilor aferente cu diviziune în frecvență cu utilizare de două ori mai eficientă în telecomunicații a spațiului de frecvențe alocat decât la MA simplă.

* Se încarcă de pe disc, din fișierul SSSP_DSP și se vizualizează secvența SSSP reală, construirea pentru a avea BL spectrale (simetrice ca și semnalul e real) net conturate, aproximativ dreptunghiulare.

Pentru a obține BL net conturate recurgem la o mică deplasare din zona $F=0$ prin multiplicare în timp cu o secvență conisuidală, deci o “MA de produs” auxiliară, care trebuie confundată, așa cum am arătat, cu MA cu purtătoare de înaltă frecvență pentru telecomunicații.

Pentru a obține BL aproximativ dreptunghiulare, semnalul temporal “modulator”, de bază, e de tip sinus cardinal cu pulsația normală ($W_{\sin c} = \pi$) $B = 0,5$ de lungime $N=200$, constituit dintr-o secvență SINC (dintr-o secvență SIN de 99 eșantioane, (inițial de 100 eșantioane dar, cu eliminarea primului prin editare/ copiere a eșantioanelor 1-99) împărțită la o secvență RAMPA de 99 eșantioane [începând de la

valoarea 1 (pentru a evita o împărțire ulterioară la 0 în constituirea SINC) cu increment 1], împărțirea făcându-se indirect prin inversarea valorilor rampei în modul nelinear/ reciproc și apoi prin înmulțire cu SIN.

Completăm SINC cu 1-ul eșantion; de valoare 1, (constituim o secvență UNU (cu 1 eșantion de valoare 1) de tip impuls, la care să adugăm, în modul editare/adăugare, secvența SINC.

Pentru o perfectă simetrie, generăm secvența CNIS, simetrică (și în denumire) cu SINC, prin editare/basculare, și apoi secvența globală SSS prin con-cantinare CNIS și SINC, prin editare/adăugare.

Purtătoarea COS e cosinusoidală cu $(W_{\cos} =) B = 31 \cdot 2\pi / 199 = 0,978787658$, având 31 de perioade și 200 eșantioane (nr. impar de perioade 199 în loc de 200 la numitorul lui B- pentru simetrie perfectă, cu axa centrală la $(n)=99,5$)-întrucât $n=(0, \dots, 199)$

Simulăm MA de produs, obținând SSSP prin înmulțirea secvența a SSS și COS.}

* Se vizualizează periodograma BLD al lui SSSP, conținută în secvența XSSSPC, din fișierul XSSSPC_.DSP care încarcă de pe disc.

{Detalii despre modul în care s-a obținut XSSSPC: Pentru secvențe reale, având deci periodograma d.s.p pară (pentru proprietățile de paritate vezi aplicația 2.1, pag.45-curs), programul PCDSP nu afișează decât una din cele 2 BL ale d.s.p., în zona $F=0 \dots 0,5$. Pentru afișare a ambelor BL (similară cu afișarea modulului TFR- vezi verificările de consistență de mai sus), a trebuit ca secvența să fie făcută, formal, complexă prin adăugarea $0,001*j$, valoare mică, ce nu modifică spectrul, la fiecare eșantion al SSSP (s-a constituit, în prealabil secvența IMAG200, de tip fereastră dreptunghiulară cu înălțimea micșorată prin înmulțire cu 0.001 și , apoi, secvența formală XSSPCPLX, în modul editare/complex, cu secvența SSSP cu partea reală și secvența IMAG200 ca parte imaginară). XSSSPC este deci periodograma lui XSSPCPLX, reprezentare aproximativă d.s.p. – BLD a lui SSSP}

* Se calculează transformata Hilbert a lui SSSP, prin trecerea secvenței SSSP prin filtrul digital RFI – transformata Hilbert (posibilă și în modul filtru / procesare) realizată prin convoluția $SSSPHTLB=SSSP*HTLB$:
[DATE/ PROCESARE/ CONVOLUȚIE/ <SSSPHTLB, SSSP, HTLB>].

* Se vizualizează SSSPHTLB, spre comparație cu SSSP. (Secvența SSSPHTLB e disponibilă și în fișierul SSSPHTLB.DSP de pe disc)
Se observă că $N_{SSSPHTLB} = N_{SSSP} + N_{HTLB} - 1 = 262$

* Se încarcă de pe disc fișierul SSSS_.DSP, și se vizualizează secvența SSSS care reprezintă modificarea SSSP pentru procesarea ulterioară BLU, prin prelungirea la aceeași lungime cu SSSPHTLB, păstrându-l însă centrat , deci prin adăugare a câte 31 eșantioane 0 la stanga și la dreapta (modul procesare/ -transalație și – adăugare 0).

* Se încarcă de pe disc fișierele SSSS_.DSP și SSSSHTLB. DSP ce conțin trunchierea simetrică a secvențelor SSSS, cu câte 3 eșantioane, la stanga și la dreapta

(realizată în modul editare/ copiere) pentru la lungimea 256(putere alui 2), în vederea TFR.

* Se calculează secvențele FSSSSS și FSSSSH ce reprezintă TFR a secvențelor SSSS și transformatei sale Hilbert, SSSHTLB.

[DATE/ TRANSFORMARE/ TFR]

* Se verifică faptul că transformatorul Hilbert digital e un defazor $\pi/2$ de bandă largă (verificarea anterioară a defazorului s-a făcut doar pentru o singură armonică, listând pe ecran FSSSSS și FSSSSH,

[SISTEM/ TIPĂRIRE <FSSSSS, S>, etc], alegând 3 perechi de ecuații spectrale, de exemplu cele numerotate 30,31,32 în liste și completând (cu doar 3 cifre exacte și cu o reprezentare grafică fazorială aproximativă) tabelul comparativ:

Exerciții – Se propun ca exerciții dezvoltarea unor exemple care să prezinte și alte aspecte calitative ale analizei temporale și spectrale a semnalelor, de exemplu:

- Discontinuitate în semnal (/sau într-o derivată de-a lui)

- Prezența $\sigma(t)$ în derivată (/ de ordin superior)
- Spectru infinit

- Semnal / spectru abrupt (derivate mari)

↔ spectru/ semnal neted (derivate mici)

[la limita, $\sigma(t) \leftrightarrow 1$]

- Simularea cu PCDSF a unui semnal MF
- Interpolarea a două secvențe (întrețeserea eșanșioanelor)
- Evidențierea alierii spectrale la sub – eșanșionare, etc.